Universitat Politècnica de Catalunya
Departament de Llenguatges i Sistemes Informàtics
Programa de Doctorat de *Software*

TESI DOCTORAL

Satisfacció de Restriccions Geomètriques en 2D

Juliol 1998

Antoni Soto i Riera

Director: Robert Joan i Arinyo

A la Montse i a la Roser

Agraïments

Són moltes les persones que han contribuït d'una manera o d'una altra a la realització d'aquesta tesi. A totes elles els voldria expressar el meu més sincer agraïment.

Vull agrair especialment al meu director de tesi, el Dr. Robert Joan Arinyo, el seu suport i dedicació constants.

Als companys del grup de restriccions, la Núria Mata, en Josep Suy, en Sebas Vila i la Núria Pla, els vull agrair el fet de compartir les discussions setmanals que tantes vegades han resultat profitoses. A la Núria Mata també li he d'agrair la lectura minuciosa del manuscrit de la tesi.

Finalment, vull agrair a tota la meva família, i especialment a la Montse, la comprensió i el suport que he rebut tothora.

Índex

Índex de figures

Índex de taules

Capítol 1

Introducció

1.1 Disseny assistit per computador

Els sistemes de Disseny Assistit per Computador (CAD) són eines de suport al disseny d'objectes. Un dels principals objectius en el disseny dels sistemes de CAD actuals és el de capturar no només la geometria dels dissenys sinó també les intencions del dissenyador. Per tal d'assolir aquest objectiu es vàren proposar els sistemes de CAD basats en característiques.

Els sistemes de CAD basats en característiques ofereixen als dissenyadors operacions d'incorporació de característiques al disseny. Les característiques es poden correspondre amb els elements funcionals rellevants del disseny. La flexibilitat que ofereixen els sistemes de CAD basats en característiques és encara més gran si les característiques estan definides en base a restriccions.

Els dissenys basats en restriccions poden ser paramètrics o variacionals. En els dissenys paramètrics, les restriccions s'han de definir de tal manera que permetin que la resolució sigui seqüencial. Els dissenys paramètrics no admeten configuracions cícliques de restriccions. Els dissenys variacionals descriuen de forma declarativa el conjunt de restriccions sense establir cap seqüència d'avaluació de les restriccions. El sistema de satisfacció de restriccions geomètriques és el component dels sistemes que admeten dissenys variacionals que té la tasca fonamental de trobar una solució del disseny que satisfaci les restriccions.

D'altra banda, els dissenys normalment s'han d'emmagatzemar, intercanviar i reutilitzar. Hoffmann i Joan-Arinyo, [32], proposen el concepte de *representació editable* (*Erep*). Una Erep és una represencació textual d'alt nivell per dissenys basats en característiques que compleix les tres propietats bàsiques següents: cal que la representació sigui emmagatzemable i transmisible, cal que representi amb fidelitat el procés de disseny i cal que permeti dissenyar en base a restriccions. Les característiques representades en una Erep es creen a partir de geometria bidimensional mitjançant operacions d'escombrat paral·lel, d'escombrat rotacional o d'escombrat generalitzat. Per consegüent, els sistemes de CAD basats en una Erep han de tenir com a component un editor bidimensional basat en restriccions.

1.2 Motivació i objectius

La definició de característiques en una Erep parteix d'un croquis bidimensional anotat amb restriccions. Per tant, és imprescindible disposar d'un sistema de satisfacció de restriccions bidimensional. Aquesta ha estat la principal motivació per a l'estudi del problema de la satisfacció de restriccions geomètriques bidimensionals.

Malgrat que s'han proposat diferents mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques, cap d'ells és prou general, eficient i robust per ser adient en tots els possibles casos. Entre tots aquests mètodes, els constructius destaquen especialment. Els mètodes constructius satisfan les restriccions de manera constructiva, posicionant els elements geomètrics seguint un cert ordre. Es basen en el fet que la major part de dissenys en l'enginyeria són resolubles mitjançant un conjunt reduït d'instruments com ara el regle, el compàs i el transportador d'angles.

En aquesta tesi s'estudia el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques bidimensionals amb l'objectiu d'aprofundir en l'estudi dels mètodes constructius. A més, també es té com a objectiu l'estudi de la combinació de mètodes constructius amb mètodes equacionals per tal d'abordar problemes que continguin restriccions geomètriques simbòliques i equacions que relacionin les variables de les restriccions simbòliques amb variables tecnològiques dels dissenys.

1.3 Estructura

L'estructura d'aquesta tesi és la següent. En el Capítol 2 es defineix amb precisió el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques. A continuació es revisen breument alguns resultats de la teoria de rigidesa que estan relacionats amb el concepte de problema geomètric definit en base a restriccions ben restringit. Finalment, es defineix el concepte de problema geomètric definit en base a restriccions estructuralment ben restringit.

El Capítol 3 conté una classificació dels principals mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques que han estat proposats fins al moment. S'ha tingut especial cura en classificar el mètodes i no la funcionalitat dels sistemes, que molt freqüentment recòrren a l'ús de més d'un mètode.

El Capítol 4 descriu un nou mètode constructiu de satisfacció de restriccions geomètriques. El mètode està estructurat en quatre fases: traducció, anàlisi, generació i construcció. Aquest capítol s'estructura en seccions que es corresponen amb les fases del mètode. Per cada fase es descriu un conjunt de regles de reescriptura que n'implementen la funcionalitat. Val a dir que el nucli del mètode és el conjunt de regles d'anàlisi.

En el Capítol 5 es demostra la correctesa de la fase d'anàlisi del mètode constructiu presentat al Capítol 4. També es discuteix, més informalment, la correctesa de la fase de generació.

El Capítol 6 presenta un mètode híbrid per a la satisfacció de restriccions geomètriques valuades i simbòliques. Es contempla la possibilitat de resoldre sistemes d'equacions que relacionin variables dimensionals amb variables tecnològiques. El mètode híbrid combina el mètode constructiu del Capítol 4 amb un mètode equacional.

En el Capítol 7 es demostra la correctesa de la fase d'anàlisi del mètode híbrid presentat al Capítol 6.

En el Capítol 8 es descriu la implementació d'un prototipus de sistema de satisfacció de restriccions geomètriques basat en els mètodes constructiu i híbrid que s'han presentat en els capítols 4 i 6.

En el Capítol 9 s'extreuen conclusions sobre el treball realitzat i s'indiquen possibles treballs futurs.

L'Apèndix A conté un resum de terminologia i notació de teoria de grafs.

A l'Apèndix B es repassa breument la terminologia i la notació de sistemes de reducció abstractes. A més, s'inclouen alguns dels resultats de sistemes de reducció abstractes que ens són d'utilitat.

A l'apèndix C s'enumeren els tipus dels elements geomètrics i les restriccions que s'han emprat en aquesta tesi. A més, es descriu el llenguatge geomètric declaratiu amb que s'expressa la solució constructiva d'un problema geomètric definit en base a restriccions.

L'Apèndix D comença amb la descripció del conjunt complet de regles del mètode constructiu estructurada per fases i continua amb la descripció de les regles del mètode híbrid per cada una de les fases.

Capítol 2

Satisfacció de restriccions geomètriques

En aquest capítol es presenta el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques i se'n proposa una formalització. La formalització del problema requereix que el conjunt de restriccions defineixi de manera consistent un objecte. La teoria de rigidesa genèrica estudia com caracteritzar els problemes geomètrics ben restringits. Després de repassar alguns dels resultats assolits en aquest àmbit, constatem que es desconeix com caracteritzar els problemes ben restringit en els quals intervenen restriccions de distància i angle. Finalment, definim el concepte de problema geomètric estructuralment ben restringit que únicament garanteix que el problema compleix condicions necessàries per tal de ser ben restringit.

2.1 Introducció

Informalment, el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques consisteix en calcular les posicions relatives d'un conjunt d'elements geomètrics de manera que compleixin un conjunt de restriccions definides entre els elements. Punts, rectes i cercles són exemples d'elements geomètrics. Entre aquests tipus d'elements es poden definir restriccions de distància entre punts o entre punts i rectes, d'angle entre rectes i de tangència entre rectes i cercles o entre cercles.

Es poden distingir dos enfocaments diferents a l'hora de formalitzar el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques. En un, el problema es representa com un graf simètric on els nodes són elements geomètrics i les arestes són restriccions, [25, 26, 27, 67, 68, 80]. Normalment es considera que els elements geomètrics tenen dos graus de llibertat mentre que cada restricció n'elimina un. En l'altre enfocament, el problema es representa mitjançant un predicat en lògica de primer ordre, [1, 10, 87].

El segon enfocament, que és l'adoptat ací, és més general que el primer i és especialment interessant quan es vol incorporar al problema informació no

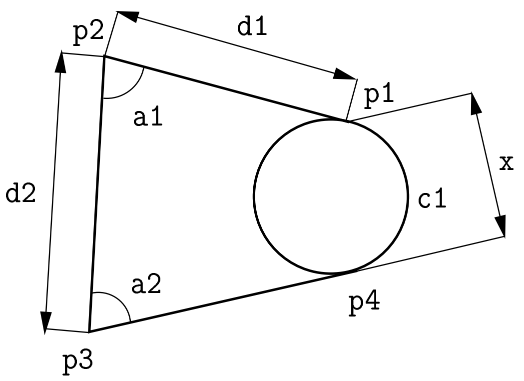


Figura 2.1: Problema geomètric definit en base a restriccions.

geomètrica. En particular, permet representar problemes geomètrics definits en base a restriccions amb restriccions simbòliques i equacions. Malgrat tot, la caracterització combinatòria d'estructuralment ben restringit es basa en una representació del problema mitjançant un graf de restriccions geomètriques. En el Capítol 5 veurem com les restriccions geomètriques valuades s'expressen com un graf de restriccions.

2.2 Problema geomètric definit en base a restriccions

Un problema geomètric definit en base a restriccions es pot expressar mitjançant un predicat de lògica de primer ordre amb tipus i igualtat com una conjunció de restriccions i equacions. Les restriccions poden ser o bé predicats o bé una forma restringida d'equacions on la part esquerra és l'aplicació d'una funció i la part dreta és una variable o una constant. S'anomenen *restriccions geomètriques lògiques* a les restriccions que són predicats, *restriccions geomètriques valuades* a les restriccions on la part dreta de l'equació és un valor constant i *restriccions geomètriques simbòliques* a les restriccions on la part dreta de d'equació és un valor variable. Les variables que denoten el valor de les restriccions geomètriques simbòliques s'anomenen *variables dimensionals*. Les equacions relacionen variables dimensionals amb variables tecnològiques que no tenen una interpretació geomètrica. Aquestes variables s'anomenen *variables externes*.

Exemple 2.1. El problema geomètric definit en base a restriccions de la Figura 2.1 s'expressa mitjançant la fórmula φ definida a la Figura 2.2. Totes les restriccions d'aquest problema són valuades llevat de la darrera, que és una equació, i la penúltima, que és una restricció geomètrica simbòlica. `x` és, doncs, una variable dimensional mentre que `y` és una variable externa. La resta de predicats són restriccions geomètriques lògiques, com `tg` o `sobre`, o restriccions geomètriques valuades.

```
constants
  d1, d2: ℝ⁺
  a1, a2: Angle
variables
  p1, p2, p3, p4: Punt
  r1, r2, r3: Recta
  c1: Cercle
  x: ℝ⁺ ∪ {0}
  y: ℝ
problema
  φ(p1, p2, p3, p4, r1, r2, r3, c1, x, y) ≡
       dist(p1, p2) = d1
     ∧ dist(p2, p3) = d2
     ∧ sobre(p1, r1)
     ∧ sobre(p2, r1)
     ∧ sobre(p2, r2)
     ∧ sobre(p3, r2)
     ∧ sobre(p3, r3)
     ∧ sobre(p4, r3)
     ∧ angle(r1, r2) = a1
     ∧ angle(r2, r3) = a2
     ∧ sobre(p1, c1)
     ∧ sobre(p4, c1)
     ∧ tg(c1, r1)
     ∧ tg(c1, r3)
     ∧ dist(p1, r3) = x
     ∧ (x - 3) / 2 = y
```

Figura 2.2: Fórmula corresponent al problema de la Figura 2.1.

A l'Apèndix C hi ha la llista completa de tipus i funcions que s'usen en aquesta tesi. En aquest exemple, intervenen elements geomètrics de tipus `Punt`, `Recta` i `Cercle`. Informalment, el significat de les restriccions és el següent: `dist` és la distància entre dos punts o entre un punt i una recta, `angle` és l'angle entre dues rectes, `sobre` expressa la coincidència d'un punt sobre un cercle o una recta, i `tg` denota que dos cercles o un cercle i una recta són tangents. ◊

2.3 Formalització del problema

Sigui φ el predicat en lògica de primer ordre corresponent a un problema geomètric definit en base a restriccions i siguin $v_i, 1 \leq i \leq l$, les variables del problema. Direm que el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques consisteix en demostrar la fórmula

$$\exists v_1, \ldots, \exists v_l \mid \varphi(v_1, \ldots, v_l).$$

Per l'axioma d'elecció [10, 46] el problema es redueix a demostrar l'existència de les funcions $f_1, \ldots, f_l$ en

$$\exists v_1, \ldots, \exists v_l \mid \varphi(v_1, \ldots, v_l) \Rightarrow \exists f_1, \ldots, \exists f_l \mid \varphi(f_1, \ldots, f_l). \tag{2.1}$$

L'objectiu a assolir és la demostració constructiva de la fórmula 2.1, és a dir, l'obtenció de les funcions $f_1, \ldots, f_l$. Per tant, un mètode de satisfacció de restriccions geomètriques ha de produir com a resultat una fórmula constructiva $\Psi(v_1, \ldots, v_l)$, tal que si les restriccions *defineixen consistentment* un objecte geomètric, permeti calcular les posicions relatives dels elements geomètrics i els valors de les variables dimensionals i de les variables externes.

Un exemple de fórmula constructiva podria ser [10]

$$\Psi(v_1, \ldots, v_l) \equiv v_1 = f_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{l} v_i = f_i(v_1, \ldots, v_{i-1}).$$

2.4 Rigidesa genèrica

Abans de cercar una fórmula constructiva que satisfaci un problema geomètric definit en base a restriccions cal garantir que el conjunt de restriccions defineix consistentment el problema. La teoria de rigidesa genèrica aborda, entre d'altres, aquest problema. El problema geomètric definit en base a restriccions es formalitza, en aquest àmbit, mitjançant diferents menes de grafs que anomenem grafs de restriccions geomètriques.

Un *graf de restriccions geomètriques* és un graf simètric $G = (V, E)$ on els vèrtexs V són elements geomètrics i les arestes $E \subseteq V \times V$ són restriccions binàries entre elements geomètrics. La Figura 2.3 mostra el graf de restriccions geomètriques corresponent al problema de la Figura 2.1. A voltes, convé considerar els conjunts de vèrtexs o d'arestes particionats segons els tipus d'elements geomètrics o de restriccions que representen. Per exemple, $G = (P, R; D, A, H)$ és un graf de restriccions geomètriques on el conjunt de vèrtex és la unió dels conjunts disjunts P de punts i R de rectes. El conjunt d'arestes està particionat en els conjunts D de restriccions de distància entre punts, A de restriccions d'angle entre rectes i H de restriccions de distància entre punts i rectes.

La teoria de rigidesa genèrica aporta caracteritzacions combinatòries del concepte de genèricament ben restringit per diferents tipus de problemes geomètrics definits en base a restriccions. Intuïtivament, un problema geomètric definit en base a restriccions és genèricament ben restringit si conté un nombre suficient de restriccions independents. La caracterització combinatòria de la propietat de genèricament ben restringit per un problema geomètric definit en base a restriccions no depèn dels valors concrets de les restriccions. L'únic requisit és que la selecció del valor de les restriccions sigui genèrica, és a dir, que no hi hagi dependències entre els valors. A continuació s'inclouen alguns dels resultats de la teoria de rigidesa genèrica recopilats per Owen, [68]. Whiteley, [84], resumeix els resultats teòrics, les aplicacions i els problemes oberts de la teoria de rigidesa genèrica.

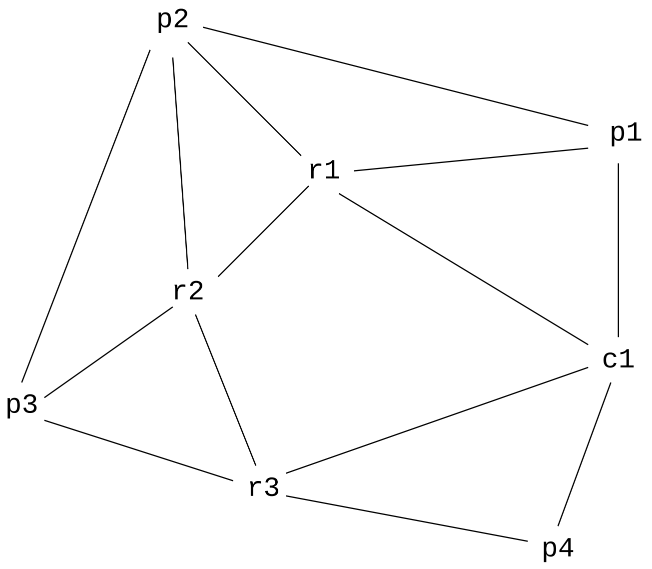


Figura 2.3: Graf de restriccions geomètriques corresponent al problema de la Figura 2.1.

El primer resultat, degut a Laman, [54], estableix condicions combinatòries necessàries i suficients per decidir si un problema amb punts com a elements geomètrics i amb restriccions de distància entre punts és ben restringit.

Teorema 2.1. *Sigui $G = (P, D)$ un graf de restriccions geomètriques on els vèrtexs P són punts a l'espai euclidià de dues dimensions i les arestes $D \subseteq P \times P$ són restriccions de distància entre punts. G és genèricament ben restringit si i només si per tot $G' = (P', D')$, subgraf de G induït per $P' \subseteq P$, es compleix:*

1. $|D'| \leq 2\,|P'| - 3$, *i*
2. $|D| = 2\,|P| - 3$.

El segon resultat, degut a Servatius i Whiteley, [73], estableix condicions necessàries i suficients per decidir si un problema amb punts com a elements geomètrics i amb restriccions de distància entre punts i restriccions que fixen la direcció d'un segment donat com una parella de punts és ben restringit.

Teorema 2.2. *Sigui $G = (P; D, F)$ un graf de restriccions geomètriques on els vèrtexs P són punts a l'espai euclidià de dues dimensions i on el conjunt d'arestes està particionat en $D \subseteq P \times P$, un conjunt de restriccions de distància entre punts, i $F \subseteq P \times P$, un conjunt de segments cadascun d'ells amb direcció fixa. G és genèricament ben restringit si i només si per tot $G' = (P'; D', F')$, subgraf de G induït per $D' \cup F' \subseteq D \cup F$, es compleix:*

1. *si $D' \cup F'$ no és buit,* $|D' \cup F'| \leq 2\,|P'| - 2$,
2. *si $D' \cup F'$ no és buit i pur,* $|D' \cup F'| \leq 2\,|P'| - 3$, *i*

3. $|D \cup F| = 2\,|P| - 2.$

El tercer resultat, degut a Owen i Whiteley, [66], estableix condicions necessàries i suficients per decidir si un problema amb punts i rectes amb la direcció fixada com a elements geomètrics i restriccions de distància entre punts i rectes és ben restringit.

Teorema 2.3. *Sigui $G = (P, R; H)$ un graf de restriccions geomètriques. El conjunt de vèrtexs de G està particionat pel conjunt P de punts a l'espai euclidià de dues dimensions i pel conjunt R de rectes, cadascuna d'elles amb direcció fixa. Les arestes $H \subseteq P \times R$ són restriccions de distància entre punts i rectes. G és genèricament ben restringit si i només si per tot subgraf G' de G induït per $P' \subseteq P$ i $R' \subseteq R$, $G' = (P', R'; H')$, es compleix*

1. $|H'| \leq 2\,|P'| + |R'| - 2$ *, i*

2. $|H| = 2\,|P| + |R| - 2.$

Finalment, pel problema geomètric definit en base a restriccions amb punts i rectes com elements geomètrics i restriccions de distància i angle entre aquests elements, només es coneix la condició necessària de genèricament ben restringit següent.

Teorema 2.4. *Sigui $G = (P, R; D, A, H)$ un graf de restriccions geomètriques on el conjunt de vèrtex està particionat pel conjunt de punts P i pel conjunt de rectes R, i el conjunt d'arestes està particionat pels conjunts D de restriccions de distància entre punts, A de restriccions d'angle entre rectes i H de restriccions de distància entre punts i rectes. Si G és genèricament ben restringit, aleshores es compleix:*

1. $|D' \cup A' \cup H'| \leq 2(|P'| + |R'|) - 3$*, per tot subgraf* $G' = (P', R'; D', A', H')$ *de G induït per $P' \subseteq P$ i $R' \subseteq R$;*

2. $|A'| \leq |R'| - 1$*, per tot subgraf* $G' = (\emptyset, R'; \emptyset, A', \emptyset)$ *de G induït per $R' \subseteq R$, i*

3. $|D \cup A \cup H| = 2(|P| + |R|) - 3.$

El graf de restriccions geomètriques de la Figura 2.4, [68], és un contraexemple que demostra que aquesta condició no és suficient. Malgrat que el graf de restriccions geomètriques de la Figura 2.4 compleix les condicions del Teorema 2.4, el problema és sobre-restringit perquè les tres rectes, etiquetades amb `r`, estan restringides implícitament per restriccions d'angle.

2.5 Rigidesa estructural

Un cop constatada la manca d'una condició combinatòria que estableixi quan un problema geomètric definit en base a restriccions és genèricament ben restringit, definim els conceptes de graf de restriccions geomètriques estructuralment

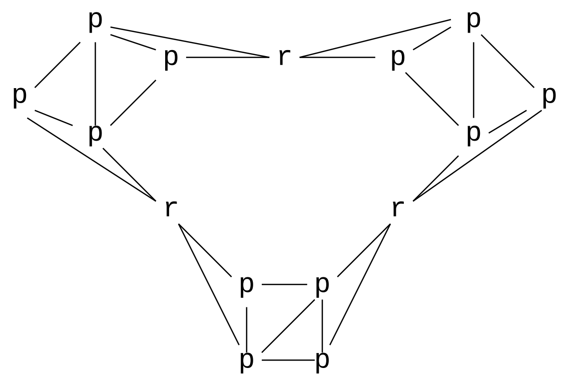


Figura 2.4: Problema sobre-restringit que compleix les condicions del Teorema 2.4.

sobre-restringit, estructuralment sota-restringit i estructuralment ben restringit, [26]. Les definicions següents reflecteixen les condicions necessàries del Teorema 2.4 per tal que un graf de restriccions geomètriques sigui genèricament ben restringit.

Definició 2.1. El graf de restriccions geomètriques $G = (V, E)$ és *estructuralment sobre-restringit* si existeix un subgraf induït de $m \leq |V|$ vèrtexs tal que el nombre d'arestes sigui més gran que $2m - 3$ o existeix un subgraf induït de $r \leq |V|$ rectes tal que el nombre d'arestes sigui més gran que $r - 1$.

Definició 2.2. El graf de restriccions geomètriques $G = (V, E)$ és *estructuralment sota-restringit* si no és estructuralment sobre-restringit i el nombre de restriccions és menor que $2|V| - 3$.

Definició 2.3. El graf de restriccions geomètriques $G = (V, E)$ és *estructuralment ben restringit* si no és estructuralment sobre-restringit i el nombre de restriccions és igual a $2|V| - 3$.

Només resta destacar que la definició de graf de restriccions geomètriques estructuralment sobre-restringit estableix una condició suficient, però no necessària per decidir si un graf de restriccions geomètriques és genèricament sobre-restringit.

Capítol 3

Aproximacions al problema

En aquest capítol es presenta una classificació d'alguns dels mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques que s'han proposat fins al moment. S'ha tingut especial cura en classificar els mètodes i no la funcionalitat dels sistemes on s'usen ja que els sistemes freqüentment recòrren a l'ús de més d'un mètode.

Els mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques s'han classificat en tres grans grups: els equacionals, els constructius i els d'anàlisi dels graus de llibertat. També s'inclou un apartat dedicat a la demostració automàtica de teoremes geomètrics. Es poden trobar classificacions alternatives dels mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques en [22, 25]. En [24, 35] es dedica algun apartat a la satisfacció de restriccions geomètriques tot i que aquesta no és la temàtica principal d'aquests treballs.

3.1 Propietats dels mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques

Sense pretendre ser exhaustius, algunes de les propietats desitjables en un mètode de satisfacció de restriccions geomètriques són les següents.

1. *Consistència.* Hom diu que un mètode és consistent si obté una solució només quan aquesta existeix. És imprescindible, per exemple, que el problema geomètric definit en base a restriccions sigui ben restringit.

2. *Completesa.* Hom diu que un mètode és complet si permet resoldre qualsevol problema geomètric definit en base a restriccions. En els mètodes que no són complets, es valora si es caracteritza el domini del mètode.

3. *Solució previsible.* Hom diu que un mètode té solució previsible quan ofereix control sobre la solució que s'obté. Les restriccions geomètriques donen lloc a sistemes d'equacions no lineals que, en general, tenen un nombre exponencial de solucions, [67]. Per tant, és fonamental que els mètodes de satisfacció de restriccions geomètriques ofereixin mecanismes que permetin seleccionar les diferents solucions.

4. *Sentit geomètric.* Hom diu que un mètode conserva el sentit geomètric si la solució es pot expressar com una seqüència de construccions geomètriques.

5. *Correctesa.* Hom diu que un mètode és correcte si sempre acaba i si s'obté una solució, aleshores satisfà totes les restriccions.

6. *Robustesa.* Hom diu que un mètode és robust si obté una solució exacta. En cas contrari es valora si s'estima la sensibilitat del mètode a les imprecissions dels càlculs.

7. *Independència de la dimensió.* Hom diu que un mètode és independent de la dimensió si és vàlid per qualsevol dimensió.

8. *Restriccions simbòliques.* Hom diu que un mètode permet tractar restriccions simbòliques si resol problemes geomètrics definits en base a restriccions on apareixen restriccions geomètriques simbòliques i equacions.

9. *Eficiència.* L'eficiència és el cost computacional del mètode.

Per cada un dels mètodes que es descriuen a continuació, es veurà quines d'aquestes propietats els són aplicables.

3.2 Mètodes equacionals

En els mètodes equacionals, les restriccions geomètriques es tradueixen a equacions de manera que s'obté un sistema d'equacions no lineals. En aquesta traducció es perd el sentit geomètric del problema. A més, un problema ben restringit dóna lloc a un sistema d'equacions sotadeterminat, ja que les restriccions permeten calcular les posicions relatives dels element geomètrics i, per tant, en el cas bidimensional, queden per fixar tres graus de llibertat, dos del quals corresponen a una translació i un a una rotació de tot el conjunt d'elements geomètrics.

Els mètodes numèrics i simbòlics resolen el problema geomètric definit en base a restriccions usant tècniques estàndard de resolució de sistemes d'equacions. Els mètodes de propagació intenten aprofitar l'estructura triangular del sistema d'equacions per tal d'evitar resoldre simultàniament més d'una equació.

Els mètodes equacionals admeten restriccions simbòliques perquè s'expresen com equacions i són mètodes independents de la dimensió.

Veiem tot seguit amb més detall els diversos mètodes d'aquesta família.

3.2.1 Mètodes numèrics

Els mètodes numèrics iteratius permeten resoldre grans sistemes d'equacions no lineals. En general, han de partir d'una bona aproximació de la solució per tal de garantir la convergència del mètode. Això implica que si els valors inicials es prenen d'un croquis definit en la interacció amb l'usuari, aleshores el croquis ha de complir la majoria de les restriccions. Normalment es té poc control sobre la solució a la qual convergirà. Un altre problema inherent als mètodes numèrics iteratius és la robustesa.

El mètode de *relaxació*, [79], s'usa en [7, 31] com a alternativa a mètodes de propagació. El mètode de relaxació consisteix en pertorbar els valors de les variables de manera que es minimitzi l'error global. La convergència és lenta en general.

El mètode numèric més emprat és el de *Newton-Raphson*, [43]. Aquest mètode ha estat emprat en els sistemes descrits en [30, 59, 60, 64]. Newton-Raphson es pot considerar un mètode local la qual cosa fa que si convergeix, ho fa més ràpidament que el de relaxació. Aquest mètode no és aplicable a sistemes sobredeterminats consistents.

Els mètodes d'*homotopia* o *continuació*, [2], tenen alguns avantatges respecte dels anteriors: són mètodes globals la qual cosa garanteix la convergència i són exhaustius, és a dir, permeten obtenir totes les solucions. Tot això a costa de ser menys eficients que el mètode de Newton-Raphson. Lamure, [55], aplica aquest mètode per resoldre el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques.

També s'han proposat altres mètodes menys convencionals per a la resolució del problema de la satisfacció de restriccions geomètriques. Hel-Or *et al.*, [29], basen el seu mètode, que anomenen *disseny paramètric relaxat*, en l'ús de la tècnica del filtrat de Kalman per estimar els graus de llibertat del sistema. La tècnica del filtrat de Kalman s'usa en teoria de control on s'aplica només a sistemes lineals. L'aplicació d'aquesta tècnica a sistemes no lineals fa que no es pugui garantir que es trobi una solució quan n'hi ha. Kin *et al.*, [45], proposen un mètode numèric basat en màquines de Boltzmann esteses que són una mena de xarxa neuronal que s'usa per minimitzar una funció polinòmica d'energia. Ambdós mètodes s'han de refinar per tal de ser operatius.

3.2.2 Mètodes simbòlics

Els mètodes simbòlics algebraics calculen les bases de Gröbner del sistema d'equacions no lineal. Entre els algorismes pel càlcul de les bases de Göbner en destaquen el de Buchberger, [14], i el de Wu-Ritt, [16, 86]. Essencialment transformen el sistema d'equacions polinòmiques inicial en un sistema amb les mateixes solucions en forma triangular de manera que si el sistema conté les variables $X_1, \ldots, X_n$, el primer polinomi contigui només la variable X_1 i el polinomi i-èssim contingui únicament les variables $X_1, \ldots, X_i$.

Buchanan *et al.*, [13], descriuen un sistema en el qual el mètode de satisfacció de restriccions geomètriques és l'algorisme de Buchberger. Kondo, [49], intenta subsanar els problemes inherents a la seva proposta inicial [48] usant mètodes simbòlics algebraics per tal d'obtenir un polinomi que caracteritzi les operacions d'esborrat i modificació sobre el seu model.

3.2.3 Mètodes de propagació

Representen els sistemes d'equacions mitjançant un graf simètric on els nodes del graf són les variables i les equacions, i les arestes del graf representen les ocurrències de les variables en les equacions. Intenten orientar el graf de manera que cada node equació sigui vèrtex final de totes les arestes que hi conflueixen menys una. Si s'aconsegueix orientar el graf implica que existeix una solució incremental, és a dir, una triangulació del sistema d'equacions. Per tal d'orientar el graf s'usen diferents tècniques com la propagació de graus de llibertat o la propagació de valors coneguts, [23, 71, 81]. Els mètodes de propagació no garanteixen que es trobi la solució quan n'hi ha i, normalment, es combinen amb mètodes numèrics quan fallen, és a dir, quan hi ha restriccions cícliques, [7, 53, 76, 79]. Altres aproximacions apliquen transformacions sobre el graf per intentar trencar cicles [81].

Leler, [58], descriu molt acuradament els mètodes de propagació. La seva proposta no és un mètode en concret sinó una nova eina que anomena *reescriptura de termes augmentada* que essencialment afegeix a un sistema de reescriptura classic lligams entre atoms i valors, objectes i tipus. Destaca entre els exemples d'us de la nova eina la resolució de sistemes d'equacions no lineals.

Recentment Borning *et al.*, [6], han proposat un algorisme de propagació local amb restriccions de desigualtat.

3.2.4 Tècniques d'anàlisi de sistemes d'equacions

Les tècniques d'anàlisi de sistemes d'equacions permeten esbrinar si un sistema d'equacions és sobredeterminat, sotadeterminat o ben determinat mitjançant l'anàlisi de l'estructura del sistema. Aquestes tècniques es poden estendre per tal de descompondre un sistema d'equacions en components mínims resolubles independentment, [63, 77].

Aquestes tècniques es poden usar com a preprocés de qualsevol mètode de resolució de sistemes d'equacions amb la finalitat de reduir el nombre de variables i equacions a resoldre simultàniament.

Serrano, [72], usa parcialment tècniques d'anàlisi de sistemes d'equacions per tal de seleccionar un conjunt consistent de restriccions que facin resoluble el problema d'entre un conjunt de restriccions candidates.

3.3 Mètodes constructius

Els mètodes constructius pretenen resoldre una subclasse ben definida de problemes geomètrics definits en base a restriccions: els resolubles amb regle i compàs. Aquests mètodes permeten obtenir una solució exacta expressada com una seqüència d'operacions geomètriques bàsiques com ara interseccions entre cercles i rectes. Clarament, els mètodes constructius conserven el sentit geomètric en obtenir una solució constructiva al problema. A més, la seqüència d'operacions geomètriques és una forma sintètica de representar un nombre possiblement exponencial de solucions. Les diferents solucions es poden calcular seleccionant solucions alternatives quan s'avaluen les operacions geomètriques bàsiques. En principi, només resolen restriccions geomètriques valuades.

Classifiquem els mètodes constructius segons la direcció en la qual s'analitza el problema. Anomenem *de composició* als mètodes constructius que analitzen el problema de baix cap dalt, és a dir, els mètodes que composen una solució del problema a partir de l'anàlisi de les restriccions. Als mètodes que analitzen el problema de dalt cap baix els anomenem *de descomposició*. Els mètodes de descomposició analitzen les interrelacions entre les restriccions per tal de descompondre el problema.

Els mètodes constructius de composició poden representar les restriccions entre els elements geomètrics de manera implícita o explícita. La representació implicita normalment es basa en el concepte de *conjunt de restriccions*. Els conjunts de restriccions són conjunts d'elements geomètrics amb les seves posicions relatives conegudes. L'aplicació de regles de reescriptura permet anar fusionant conjunts de restriccions fins obtenir-ne un de sol amb tots els elements geomètrics. El principal avantatge de l'ús de conjunts de restriccions és que representen molt sintèticament les relacions entre els elements geomètrics que hi pertanyen. Fudos, [8, 25, 26, 27], usa només un tipus de conjunts de restriccions, que anomena *clusters*, i disposa únicament d'una regla genèrica que permet fusionar tres *clusters* quan comparteixen un element dos a dos. Sunde, [78], i Verroust, [82, 83], usen dos tipus de conjunts de restriccions: conjunts de punts amb les seves posicions relatives conegudes i conjunts de segments amb les direccions fixades.

Lee *et al.*, [57], proposen un mètode constructiu de composició amb una representació implícita sobre el graf de restriccions. Als nodes del graf se'ls assigna un estat que pot ser ben definit, semi-definit o indefinit. Apliquen regles de deducció d'informació geomètrica per tal de modificar l'estat dels nodes.

Els mètodes constructius de composició que representen les restriccions de manera explícita normalment ho fan mitjançant predicats de lògica de primer ordre. Brüderlin *et al.*, [10, 11, 12, 74, 75] simplifiquen aquests predicats segons els axiomes de la geometria de Hilbert fins a calcular, simbòlicament, les posicions relatives dels elements geomètrics. Els mètodes proposats per Aldefeld, [1], i Yamaguchi *et al.*, [87], dedueixen informació geomètrica aplicant propietats geomètriques més elaborades que els axiomes de Hilbert. Essencialment produeixen informació sobre el lloc geomètric d'un element respecte d'altres elements posicionats prèviament.

Coneixem dos mètodes constructius de descomposició. Todd, [80], formalitza el problema geomètric definit en base a restriccions com r-trees i en deriva un algorisme de satisfacció de restriccions geomètriques. Owen, [67], proposa un mètode més general basat en la descomposició del graf de restriccions geomètriques en components triconnexos. El mètode d'Owen ha estat formalitzat per

Fudos, [25, 27], que també n'ha demostrat la correctesa.

Per alguns dels mètodes constructius s'han trobat algorismes eficients. Aquest és el cas dels mètodes d'Owen [67], de Fudos [25, 27] i de Lee *et al.* [57] que presenten algorismes $O(n^2)$ essent n el nombre d'elements geomètrics del problema. És molt probable que existeixin algorismes d'una complexitat similar per altres mètodes constructius.

Malgrat que els mètodes constructius són inherentment bidimensionals, diferents autors, [10, 34, 82], han intentat aplicar les mateixes tècniques al cas tridimensional. Per altra banda, Hoffmann i Joan-Arinyo, [33], proposen un mètode que permet resoldre restriccions simbòliques combinant un mètode constructiu per a les restriccions geomètriques valuades i un mètode equacional per a les restriccions simbòliques i les equacions.

3.4 Anàlisi de graus de llibertat

Els mètodes d'anàlisi de graus de llibertat associen graus de llibertat als elements geomètrics. Les restriccions eliminen graus de llibertat dels elements. Essencialment aquests mètodes analitzen el graf de restriccions geomètriques corresponent al problema. Els nodes i les arestes del graf s'etiqueten amb els graus de llibertat dels elements i de les restriccions respectivament.

Kramer, [50, 51, 52], proposa un mètode d'anàlisi de graus de llibertat per a la ressolució de problemes de cinemàtica, concretament per a la simulació de mecanismes. En la implementació, Kramer usa tècniques de planificació per tal d'obtenir una solució simbòlica exacta, que anomena pla. El conjunt de regles que usa en la generació del pla es basen en propietats geomètriques i, per tant, el pla obtingut conserva el sentit geomètric. Quant a la correctesa, Kramer, [52], proposa un programa que demostra la canonicitat del conjunt de regles. Si c és el número de restriccions i g és el número d'elements geomètrics, aleshores el cost del mètode de Kramer és $O(cg)$. Bhansali *et al.*, [5], proposen la generació automàtica de fragments de plans que és una de les tasques més complexes del mètode de Kramer.

Salomons *et al.*, [70], representen els objectes i les restriccions mitjançant grafs conceptuals. Combinen raonament geomètric i equacional en la resolució de restriccions. El mètode de raonament geomètric és similar al de Kramer.

Hsu, [36, 37], presenta un mètode amb dues fases clarament diferenciades: resolució simbòlica i càlcul. En la primera fase es genera un pla que resol el problema i en la segona el pla s'avalua. En aquest mètode s'usa raonament geomètric quan és possible, altrament s'apliquen mètodes numèrics.

Latham *et al.*, [56], descomponen el graf de graus de llibertat en subgrafs mínims independents, que anomenen *balanced sets*. El mètode de Latham permet detectar casos sobre-restringits i sota-restringits. Proposen assignar prioritats a les restriccions per tal de resoldre els casos sobre-restringits. Certes configuracions d'un *balanced set* es corresponen a construccions geomètriques i d'altres es resolen a partir del sistema d'equacions associat. Aquest mètode admet restriccions simbòliques. Latham, [56], demostra la correctesa del mètode.

3.5 Demostració de teoremes geomètrics

La resolució d'un problema de satisfacció de restriccions geomètriques es pot plantejar com la demostració d'un teorema geomètric. Tanmateix, el problema de la demostració automàtica de teoremes geomètrics requereix mètodes més generals i, per tant, molt més sofisticats que per resoldre el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques.

Wu, [16, 85, 86], aplica el mètode algebraic de resolució de sistemes d'equacions de Wu-Ritt a la demostració de teoremes geomètrics. En el mètode de Wu es para esment a les condicions necessàries per obtenir solucions no degenerades. Chou, [17], usa el mètode de Wu per demostrar diversos teoremes geomètrics, alguns dels quals no havien estat demostrats prèviament. Un altre aspecte relacionat amb la demostració automàtica de teoremes és l'obtenció d'una explicació geomètrica de les demostracions. Chou *et al.*, [18, 19], teballen aquest aspecte de la demostració de teoremes geomètrics.

Capítol 4

Un mètode constructiu

El primer resultat d'aquesta tesi és un nou mètode de satisfacció de restriccions geomètriques per problemes definits només amb restriccions geomètriques valuades. El mètode es fonamenta en el concepte de construïble amb regle i compàs. Direm, doncs, que el mètode és constructiu. Els mètodes constructius consten, en general, de dues fases. En la primera, s'analitza el problema per tal de trobar una seqüència de construccions amb regle i compàs que el resol. En la segona, la seqüència de construccions s'avalua a partir dels valors assignats a les restriccions. La segona fase produeix com a resultat les posicions relatives dels elements geomètrics. L'estructura d'aquest capítol coincideix amb l'estructura en fases del mètode. Tanmateix, la primera fase s'ha subdividit en les subfases de traducció, d'anàlisi i de generació. La segona fase s'ha anomenat de construcció. Aquest capítol exposa amb més detall el mètode constructiu que prèviament havia estat descrit en [39, 40, 41]

4.1 Introducció

El domini dels mètodes constructius que consideremací està limitat als problemes geomètrics definits en base a restriccions resolubles amb regle i compàs. Malgrat aquesta limitació, considerem suficients els avantatges que es deriven de l'ús de mètodes constructius. La separació en fases facilita la descripció, el raonament sobre la correctesa i la implementació del mètode. La seqüència de construccions amb regle i compàs es pot veure com una solució simbòlica no avaluada del problema. Per tant, els mètodes constructius produeixen una solució exacta del problema. Per altra banda, la seqüència de construccions amb regle i compàs és una demostració constructiva del fet que el problema té solució. En aquesta demostració s'usa únicament raonament geomètric. Finalment, la seqüència de construccions depèn de les restriccions que defineixen el problema i de com s'interrelacionen, però no depèn dels valors concrets de les restriccions.

El mètode consta de les següents fases: traducció, anàlisi, generació i construcció. La Figura 4.1 mostra la interrelació entre les fases. En la fase de

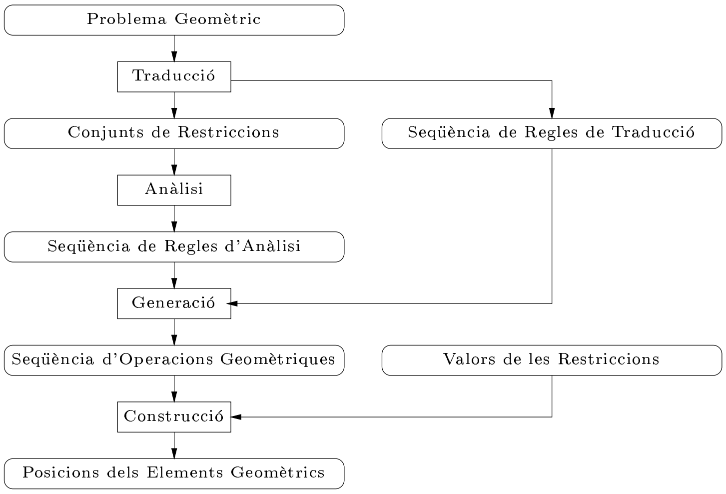


Figura 4.1: Fases del mètode constructiu.

traducció, el problema geomètric definit en base a restriccions es tradueix a una representació més adient. Aquesta representació està formada per una família de *conjunts de restriccions*. A més dels conjunts de restriccions aquesta fase produeix la seqüència de regles de traducció que s'han aplicat per obtenir-los. La fase d'*anàlisi* consisteix en l'aplicació successiva d'un conjunt de regles de reescriptura. El resultat d'aquesta fase és la seqüència de regles d'anàlisi que s'han aplicat. En la fase de *generació* s'interpreta el significat geomètric de les regles —tant de les regles de traducció com de les d'anàlisi— i es produeix la seqüència d'operacions geomètriques associada. La seqüència d'operacions geomètriques es correspon amb la fórmula constructiva de la Secció 2.3. En la fase de *construcció* s'avalua la seqüència d'operacions geomètriques substituint els identificadors de les restriccions pels seus valors. La fase de construcció produeix com a resultat les posicions relatives dels elements geomètrics.

Exemple 4.1. La Figura 4.2a mostra una representació gràfica del problema geomètric definit en base a restriccions φ.

```
φ(c, p1, p2, p3) ≡
  radi(c) = r ∧
  centre(c) = p1 ∧
  sobre(p3, c) ∧
  dist(p1, p2) = d1 ∧
  dist(p2, p3) = d2
```

La fase de traducció, primer transforma el problema inicial en un problema equivalent on només hi ha punts i restriccions que són o bé de distància entre punts, o bé de distància perpendicular entre un punt i un segment o bé d'angle entre segments. La Figura 4.2b mostra gràficament el problema transformat φ'.

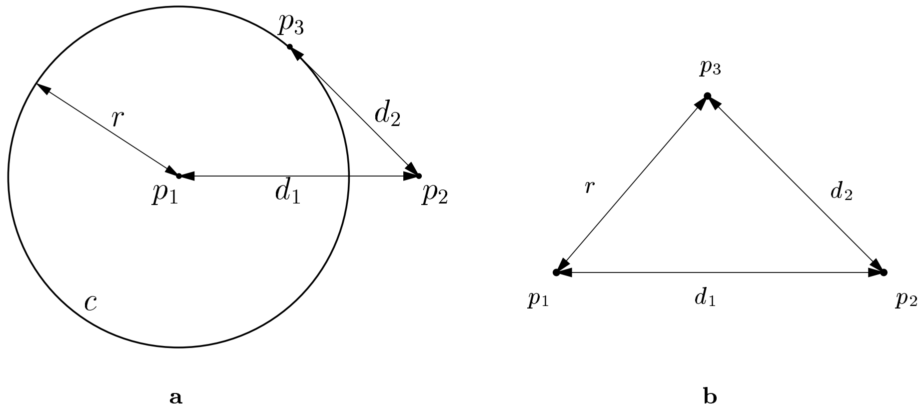


Figura 4.2: (a) Problema geomètric definit en base a restriccions. (b) El mateix problema després de la primera etapa de ls fase de traducció.

```
φ'(p1, p2, p3) ≡
  dist(p1, p2) = d1 ∧
  dist(p2, p3) = d2 ∧
  dist(p1, p3) = r
```

Posteriorment, en la fase de traducció, es creen els conjunts de restriccions elementals corresponents a cada una de les restriccions.

```
cd1 = {p1, p2}
cd2 = {p2, p3}
cd3 = {p1, p3}
```

El resultat de la fase d'anàlisi és una seqüència de regles aplicades.

```
ddd(cd4, p2, p3, p1, cd1, cd2, cd3)
```

A la fase de generació es produeix la seqüència d'operacions geomètriques.

```
ψ(c, p1, p2, p3) ≡
  c = cercleCR(p1, r) ∧
  p1 = puntXY(0, 0) ∧
  p2 = puntXY(d1, 0) ∧
  p3 = icc(cercleCR(p1, r), cercleCR(p2, d2))
```

La seqüència d'operacions geomètriques s'avalua en la fase de construcció produint com a resultat les posicions dels elements geomètrics. ◊

4.2 La fase de traducció

En aquesta fase, el problema geomètric definit en base a restriccions expressat com un predicat de lògica de primer ordre amb tipus i igualtat es tradueix a una representació més adient per a la fase d'anàlisi. El predicat que representa el problema geomètric definit en base a restriccions és una conjunció de restriccions geomètriques lògiques i de restriccions geomètriques valuades. Els elements geomètrics que intervenen en les restriccions poden ser punts, rectes o cercles amb radi conegut. Les restriccions geomètriques lògiques poden ser de tangència o de coincidència. Les restriccions geomètriques valuades poden ser de distància o d'angle. Veieu la llista completa dels elements geomètrics i restriccions a l'Apèndix C.

La fase de traducció està estructurada en dues parts. En la primera, les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles amb radi conegut es transformen en restriccions de distància al centre del cercle. Cada recta es transforma en un segment. Les restriccions sobre rectes es redefineixen en restriccions sobre segments. En la segona part, cada restricció dóna lloc a un conjunt de restriccions elemental. Els conjunts de restriccions són la representació de les restriccions emprada en la fase d'anàlisi.

La traducció de restriccions sobre cercles i rectes que es duu a terme en la primera part de la fase de traducció es justifica en el fet que el mètode de satisfacció de restriccions geomètriques només permet posicionar punts. Els segments venen definits per dos punts i també s'exigeix que sigui així per les rectes. Els cercles amb radi conegut venen determinats pel seu centre. Definint d'aquesta manera els elements geomètrics només cal calcular les posicions relatives dels punts.

4.2.1 Traducció de restriccions sobre cercles i rectes

Les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles amb radi conegut es poden transformar a restriccions de distància entre punts, restriccions de distància perpendicular entre un punt i un segment i restriccions d'angle entre segments, [62]. Es suposarà que el centre del cercle és un element del problema geomètric definit en base a restriccions. Altrament s'introduirà un nou punt que representi el centre.

Les restriccions sobre cercles amb radi desconegut es transformen en restriccions simbòliques i, per tant, es tractaran en el Capítol 6.

Es suposa que tota recta passa, com a mínim, per dos punts. Dues de les restriccions de coincidència d'un punt sobre una recta s'usen per construir un segment mentre que la resta es transformen en restriccions de distància d'un punt a un segment amb valor igual a zero.

Les regles de traducció de restriccions sobre cercles i rectes es descriuen en detall a la Secció D.1.1 de l'Apèndix D.

4.2.2 Conjunts de restriccions

Els conjunts de restriccions són conjunts d'elements geomètrics amb les seves posicions relatives conegudes. El mètode de satisfacció de restriccions geomètriques que presentem usa tres tipus de conjunts de restriccions que anomenarem **CD**, **CA** i **CH**. Els conjunts **CD** i **CA** van se proposats inicialment per Sunde, [78]. Verroust, [83], en va fer ús ampliant el conjunt de regles d'anàlisi i estudiant parcialment el domini del mètode.

Un conjunt **CA** conté un parell de segments sobre els quals hi ha una restricció d'angle.

Un conjunt **CD** és un conjunt de punts mútuament restringits en distància. Una altra forma de veure un **CD** és com un sistema de referència respecte del qual estàn posicionats tots els punts que hi pertanyen. Com que el nostre mètode posiciona només punts, s'haurà resolt un problema geomètric definit en base a restriccions quan tots els punts del problema pertanyin a un mateix **CD**. La fórmula constructiva de la Secció 2.3 es pot calcular a partir del procés que s'ha seguit per incorporar els punts a aquest **CD**.

Un conjunt **CH** conté un punt i un segment restringits per la distància perpendicular entre el punt i el segment o, el que és el mateix, un punt i un segment restringits per la distància entre el punt i la recta suport del segment.

Direm que un conjunt **CD** és *elemental* si conté únicament dos punts. Un conjunt **CD** elemental es correspon amb una restricció de distància. Considerarem que els conjunts **CA** i **CH** són sempre elementals.

Els conjunts de restriccions representen d'una forma sintètica la informació sobre el posicionament relatiu d'un conjunt d'elements geomètrics. Aquesta representació és especialment avantatjosa si es compara amb els predicats emprats en els mètodes basats en la deducció d'informació geomètrica, [1, 87]. En aquests mètodes, per representar la mateixa informació cal deduir una gran quantitat de fets que molt probablement mai s'usaran en la resolució del problema.

Representarem gràficament els conjunts de restriccions com mostra la Figura 4.3. Un conjunt **CD** es representa mitjançant una línia contínua tancada que engloba el conjunt de punts que hi pertanyen. Un conjunt **CA** es representa mitjançant un arc que uneix els dos segments que hi pertanyen. Un conjunt **CH** es representa mitjançant una línia a trams que uneix el segment i el punt que hi pertanyen.

4.2.3 Creació de conjunts de restriccions elementals

Un cop aplicades les regles de traducció de restriccions sobre cercles i rectes definides a la Secció 4.2.1, un problema geomètric definit en base a restriccions conté únicament restriccions de distància entre punts, restriccions d'angle entre segments i restriccions de distància perpendicular entre un punt i un segment. Cada una d'aquestes restriccions donarà lloc a un conjunt de restriccions elemental. Les regles que creen els conjunts de restriccions elementals es descriuen

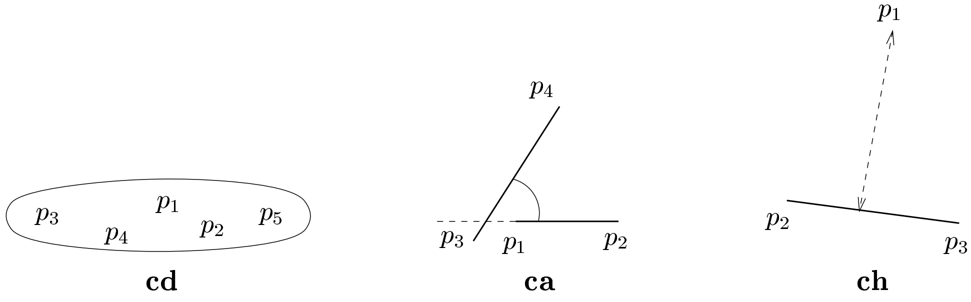


Figura 4.3: Representació gràfica dels conjunts **CD**, **CA** i **CH**.

en detall a la Secció D.1.1 de l'Apèndix D.

Les restriccions d'angle compleixen la propietat transitiva. Per això s'inclou una regla que en permet calcular la clausura transitiva dels conjunts **CA**. Aquesta regla es descriu a la Secció D.1.1 de l'Apèndix D.

4.3 La fase d'anàlisi

El conjunt de regles d'anàlisi és el nucli del mètode constructiu. Les regles modifiquen la configuració de conjunts **CD**, **CA** i **CH**. Anomenem *estat de la fase d'anàlisi* a la configuració de conjunts de restriccions en un cert instant. Sigui `D` la família de conjunts **CD**, `A` la família de conjunts **CA** i `H` la família de conjunts **CH**, el predicat `e(D, A, H)` representa l'estat de la fase d'anàlisi. Així doncs, l'*estat inicial de la fase d'anàlisi* és la configuració de conjunts de restriccions produïda per les regles de traducció descrites a la Secció 4.2.3.

Per tal d'obtenir el conjunt de regles, s'han estudiat els llocs geomètrics d'un punt definits per cada un dels conjunts de restriccions respecte d'un sistema de referència, és a dir, respecte d'un conjunt **CD**. Els llocs geomètrics només poden ser rectes o cercles. El conjunt de regles es genera sistemàticament com la intersecció de dos llocs geomètrics corresponents a un mateix punt respecte d'un sistema de referència comú.

4.3.1 Construccions amb regle i compàs

El mètode constructiu de satisfacció de restriccions geomètriques que presentarem més endavant permet resoldre problemes construïbles amb regle i compàs. En aquesta secció es descriurà amb precisió el concepte de *construcïble amb regle i compàs*. La base teòrica la proporciona la teoria de Galois, veieu [28, 88], per exemple.

Donat un conjunt de punts $\mathcal{P}$ del pla $\mathbb{R}^2$, les *operacions elementals* són:

- *Regle*: Dibuixar una *recta* que passa per dos punts qualssevol de $\mathcal{P}$.

- *Compàs*: Dibuixar un *cercle* amb *centre* sobre un punt de $\mathcal{P}$ i *radi* la distància entre dos punts de $\mathcal{P}$.

Definició 4.1. Sigui $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunt donat de punts.

1. Un punt $Q \in \mathbb{R}^2$ és *construïble en un pas* a partir de $\mathcal{P}$ si és la intersecció o bé de dues rectes diferents, o bé de dos cercles o bé d'una recta i un cercle, construïts a partir de $\mathcal{P}$ usant operacions elementals.

2. Un punt $Q \in \mathbb{R}^2$ és construïble a partir de $\mathcal{P}$ si existeix una successió finita $Q_1, \ldots, Q_n = Q$ de punts de $\mathbb{R}^2$ tals que:

   (a) Q_1 és construïble en un pas a partir de $\mathcal{P}$

   (b) Q_i és construïble en un pas a partir de $\mathcal{P} \cup \{Q_1, \ldots, Q_{i-1}\}$, $2 \leq i \leq n$.

A partir d'aquesta definició es poden realitzar tot un seguit de construccions geomètriques bàsiques com ara la bisectriu d'un segment o bé la recta perpendicular o paral·lela a una recta donada i que passi per un punt. En [38] es pot trobar un recull de les construccions geomètriques que s'empraran més endavant.

El concepte de construïble amb regle i compàs es pot formular també en el context de la teoria de cossos. Mitjançant aquesta caracterització és possible decidir si una determinada figura geomètrica és construïble amb regle i compàs. El resultat clau de la formulació algebraica de les construccions amb regle i compàs és el teorema següent, [28].

Teorema 4.1. *Si $Q = (x, y)$ és un punt construïble, l'extensió $\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}$ generada per x i y és finita i el grau de l'extensió és una potència de dos, és a dir, $[\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}] = 2^r$, per algun $r \in \mathbb{N}$.*

Així doncs, es pot demostrar que una determinada figura geomètrica no és construïble amb regle i compàs si al plantejar de forma algebraica el problema s'obté un polinomi del qual el grau de les seves solucions no és potència de dos. Són necessaris resultats més sofisticats de la teoria de cossos per tal d'obtenir la condició necessària i suficient per decidir si un problema és construïble amb regle i compàs, [69, 88], que es sintetitza en el teorema següent.

Teorema 4.2. *Sigui $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{C}$ un conjunt que conté al $0 = (0, 0)$ i a l'$1 = (1, 0)$. Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$ un punt. Les condicions següents són equivalents:*

1. *$\alpha \in \mathbb{C}$ és construïble a partir de $\mathcal{P}$.*

2. *Existeix una successió $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_j^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{j-1})$, $\forall j < n$, i $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.*

3. *α és algebraic sobre $\mathbb{Q}$, i la clausura normal N de $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ té grau $[N : \mathbb{Q}] = 2^r$ per algun $r \geq 0$.*

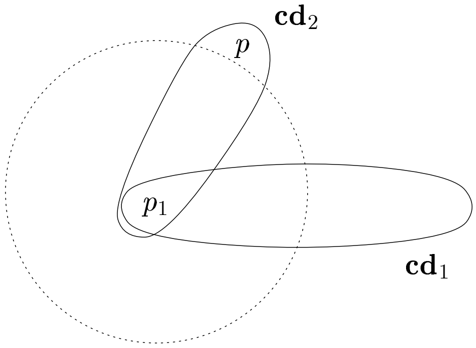


Figura 4.4: Lloc geomètric CR.

4.3.2 Llocs geomètrics

El mètode dels llocs geomètrics és una de les tècniques clàssiques de resolució de problemes geomètrics, [69]. A continuació s'estudien alguns llocs geomètrics que defineixen certes configuracions de dos conjunts de restriccions. L'estudi d'aquests llocs geomètrics és el pas previ a la generació de les regles d'anàlisi.

Prenent un conjunt **CD** com a sistema de referència, es consideren les situacions en les quals un altre conjunt de restriccions té tots els punts menys un posicionats respecte del sistema de referència. Anomenem *conjunt **CD** de referència* al conjunt **CD** que es pren com a sistema de referència. El punt no posicionat l'anomenem *punt lliure* i el seu lloc geomètric només podrà ser una recta o un cercle.

En la descripció de cada lloc geomètric s'inclouen les condicions que permeten identificar cada situació sobre la representació de les restriccions mitjançant conjunts de restriccions. Cada una d'aquestes situacions té associada una construcció geomètrica. A l'Apèndix C es troba la llista completa de construccions geomètriques que s'empren en aquesta tesi. Per cada un dels llocs geomètrics s'inclou el nom de la construcció geomètrica que el permet calcular.

Sigui `cd1` el conjunt **CD** de referència i sigui `p` el punt lliure. Sigui `x` un segment, un conjunt **CA** o un conjunt **CH**, notarem per `punts(x)` el conjunt de punts de `x`. Sigui `y` un conjunt **CH**, notarem per `seg(y)` el segment de `y`. Es consideren els següents llocs geomètrics pel punt lliure `p`. A cada un dels llocs geomètrics se li ha assignat un nom que apareix a la part esquerra de la seva descripció.

CR El lloc geomètric del punt lliure `p` és un cercle de radi conegut, Figura 4.4.
Per tal que el punt lliure `p` es trobi en el lloc geomètric CR cal que `p` pertanyi a un conjunt **CD**, `cd2`, que comparteix un únic punt `p1` $\neq$ `p` amb el conjunt **CD** de referència, `cd1`. La distància entre `p1` i `p` és coneguda perquè ambdós punts pertanyen al mateix conjunt **CD**, `cd2`. Per tant, el punt `p` està sobre un cercle de radi conegut i de centre `p1` respecte de `cd1`.

Les condicions sobre els conjunts de restriccions que identifiquen aquesta situació són les següents:

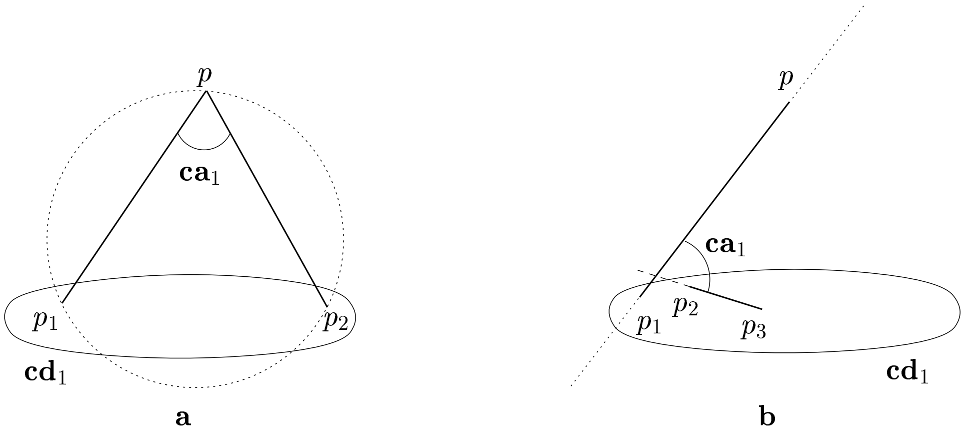


Figura 4.5: (a) Lloc geomètric CC. (b) Lloc geomètric RA.

```
cd1 ∩ cd2 = {p1} ∧
p ∈ cd2 − {p1}
```

La construcció geomètrica associada s'anomena `cercleCR` a l'Apèndix C.

CC El lloc geomètric del punt lliure `p` és un cercle definit pel teorema de l'arc capaç, Figura 4.5a. El teorema de l'arc capaç, [69], estableix que el lloc geomètric dels punts des dels quals es veu un segment format pels punts `p1` i `p2` amb un angle α és un cercle que passa per `p1` i `p2`. Per tal que el punt lliure `p` es trobi en el lloc geomètric CC cal que `p` sigui l'extrem dels dos segments d'un conjunt **CA**, `ca1`, i que `p1` i `p2`, els altres extrems dels dos segments de `ca1`, pertanyin a `cd1`.

Les condicions sobre els conjunts de restriccions que identifiquen aquesta situació són les següents:

```
punts(ca1) − cd1 = {p} ∧
punts(s1) ∩ punts(s2) = {p}
  on {s1, s2} = ca1
```

La construcció geomètrica associada s'anomena `cercleAC` a l'Apèndix C.

RA El lloc geomètric del punt lliure `p` és una recta que passa per un punt `p1` de `cd1` i que forma un angle conegut amb una recta de direcció coneguda respecte de `cd1`, Figura 4.5b. Per tal que el punt lliure `p` es trobi en el lloc geomètric RA cal que `p` sigui l'extrem d'un segment d'un conjunt **CA**, `ca1`, i que la resta de punts de `ca1` pertanyin a `cd1`.

Les condicions sobre els conjunts de restriccions que identifiquen aquesta situació són les següents:

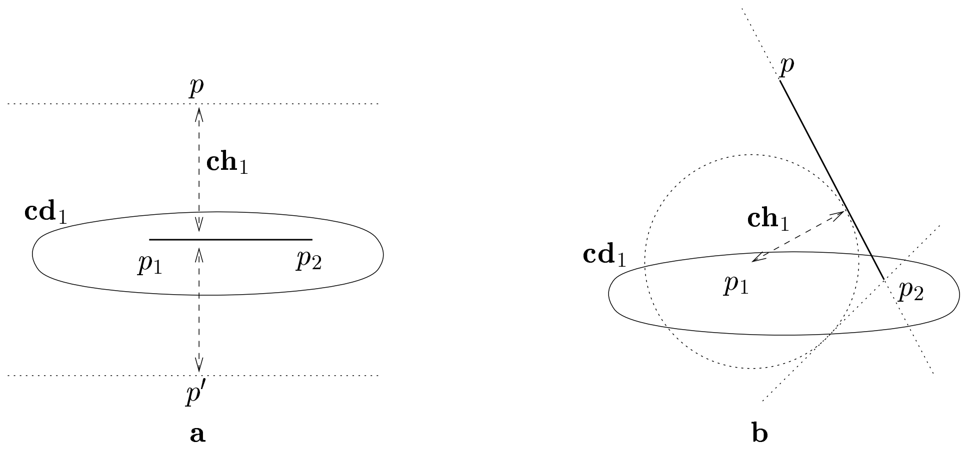


Figura 4.6: (a) Lloc geomètric RP. (b) Lloc geomètric RT.

```
punts(ca1) − cd1 = {p} ∧
punts(s1) − cd1 = ∅ ∧
punts(s2) − cd1 = {p}
  on {s1, s2} = ca1
```

La construcció geomètrica associada s'anomena `rectaAP` a l'Apèndix C.

RP El lloc geomètric del punt `p` és una recta paral·lela a una recta coneguda respecte de `cd1`, Figura 4.6a. Per tal que el punt lliure `p` es trobi en el lloc geomètric RP cal que `p` sigui el punt d'un conjunt **CH**, `ch1`, i que els punts del segment de `ch1` pertanyin a `cd1`.

Les condicions sobre els conjunts de restriccions que identifiquen aquesta situació són les següents:

```
punts(ch1) − cd1 = {p} ∧
punts(seg(ch1)) − cd1 = ∅
```

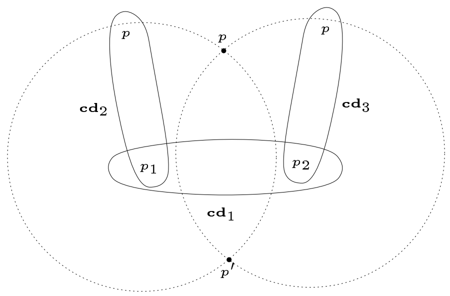
La construcció geomètrica associada s'anomena `rectaPlD` a l'Apèndix C.

RT El lloc geomètric del punt lliure `p` és una recta tangent a un cercle de centre `p1`, un punt de `cd1`, i de radi conegut, Figura 4.6b. Per tal que el punt lliure `p` es trobi en el lloc geomètric RT cal que `p` sigui l'extrem del segment d'un conjunt **CH**, `ch1`, i que la resta de punts de `ch1` pertanyin a `cd1`.

Les condicions sobre els conjunts de restriccions que identifiquen aquesta situació són les següents:

```
punts(ch1) − cd1 = {p} ∧
punts(seg(ch1)) − cd1 = {p}
```

La construcció geomètrica associada s'anomena `rectaTgCP` a l'Apèndix C.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DDD	CR-CR	

Taula 4.1: Regla de la configuració DDD.

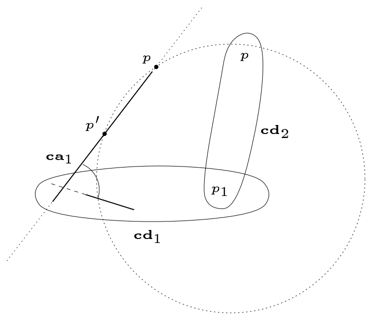
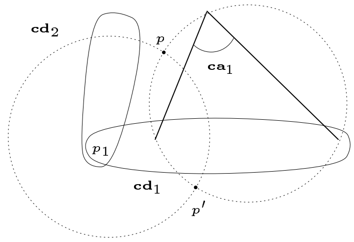
4.3.3 Generació sistemàtica del conjunt de regles

El conjunt de regles de l'Apèndix D s'ha generat sistemàticament combinant dos a dos els llocs geomètrics d'un mateix punt respecte d'una mateixa referència. Més concretament, quan un mateix punt lliure p pertany alhora a dos dels llocs geomètrics descrits a la Secció 4.3.2 respecte d'una referència comuna, és a dir, del mateix conjunt **CD** de referència R, aleshores es pot calcular la posició del punt p respecte de R com la intersecció dels dos llocs geomètrics. Per tant, el punt p es pot afegir al conjunt **CD** de referència R.

Quan un dels llocs geomètrics que intervé en una regla és un lloc geomètric **CR**, a més d'incorporar el punt lliure p al conjunt **CD** de referència, R, és possible fusionar els dos conjunts **CD**. Sigui D un conjunt **CD** tal que comparteix un punt, $q \neq p$, amb el conjunt **CD** de referència, R, i que conté el punt lliure p. Per tal de calcular les posicions dels punt de D respecte de R cal aplicar dues transformacions geomètriques: una translació i una rotació. Aquestes transformacions es poden calcular perquè es coneixen les posicions de p i q respecte de D i R.

Les regles s'han agrupat per *configuracions* segons el nombre de conjunts **CD**, **CA** i **CH** involucrats en cada regla. Les configuracions es denoten amb combinacions de tres lletres XYZ on $X, Y, Z \in \{D, A, H\}$. Les lletres D, A i H indiquen que intervé en la regla un conjunt **CD**, **CA** i **CH** respectivament. Totes les regles que pertanyen a una mateixa configuració modifiquen de la mateixa manera l'estat de la fase d'anàlisi. Només difereixen en les condicions particulars $\mathcal{C}$. Les condicions particulars són la conjunció de les condicions que identifiquen els dos llocs geomètrics que generen la regla. A l'Apèndix D s'especifiquen les condicions particulars $\mathcal{C}$ per cada regla. A continuació s'enumeren les sis configuracions de regles que s'obtenen de la combinació dels llocs geomètrics descrits a la Secció 4.3.2.

DDD La combinació de llocs geomètrics que genera la regla que involucra tres conjunts **CD** es mostra a la Taula 4.1. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DDA1	CR-RA	
DDA2	CC-CR	

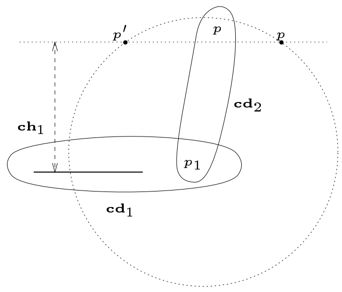
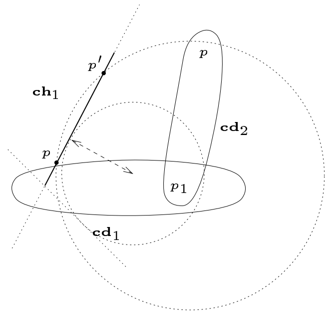
Taula 4.2: Regles de la configuració DDA.

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2, cd3} ⊆ D ∧ 𝒞 →
  e(
    (D − {cd1, cd2, cd3}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ cd3},
    A,
    H
  )
```

DDA Les combinacions de llocs geomètrics que generen les regles que involucren dos conjunts **CD** i un conjunt **CA** es mostren a la Taula 4.2. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ca1 ∈ A ∧ 𝒞 →
    e(
      (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ca1)},
      A − {ca1},
      H
    )
```

DDH Les combinacions de llocs geomètrics que generen les regles que involucren dos conjunts **CD** i un conjunt **CH** es mostren a la Taula 4.3. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DDH1	CR-RP	
DDH2	CR-RT	

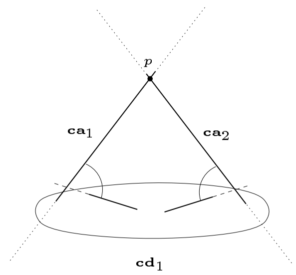
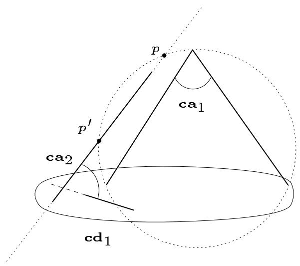
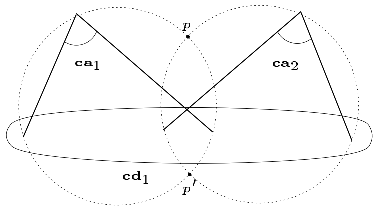
Taula 4.3: Regles de la configuració DDH.

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ch1 ∈ H ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ch1)},
       A,
       H − {ch1}
     )
```

DAA Les combinacions de llocs geomètrics que generen les regles que involucren un conjunt **CD** i dos conjunts **CA** es mostren a la Taula 4.4. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ {ca1, ca2} ⊆ A ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ca1) ∪ punts(ca2)},
       A − {ca1, ca2},
       H
     )
```

DAH Les combinacions de llocs geomètrics que generen les regles que involucren un conjunt **CD**, un conjunt **CH** i un conjunt **CA** es mostren a la Taula 4.5. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DAA1	RA-RA	
DDA2	CC-RA	
DDA3	CC-CC	

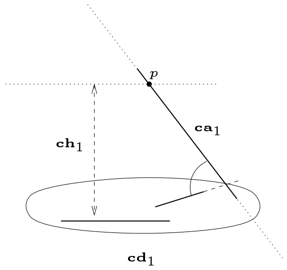
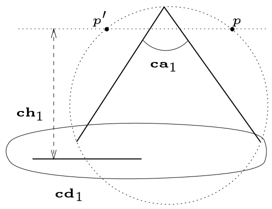
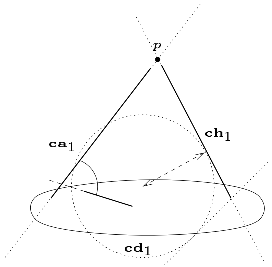
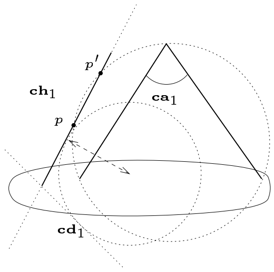
Taula 4.4: Regles de la configuració DAA.

```
e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ ca1 ∈ A ∧ ch1 ∈ H ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ca1) ∪ punts(ch1)},
       A − {ca1},
       H − {ch1}
     )
```

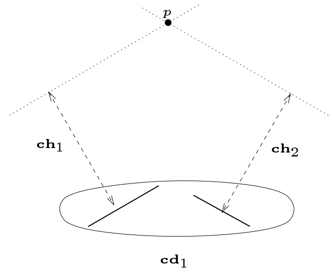
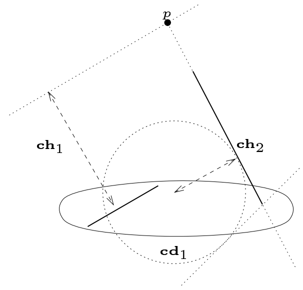
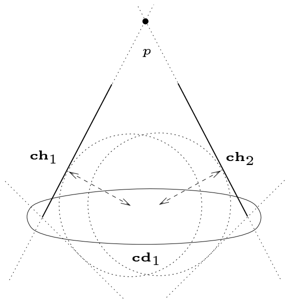
DHH Les combinacions de llocs geomètrics que generen les regles que involucren un conjunt **CD** i dos conjunts **CH** es mostren a la Taula 4.6. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ {ch1, ch2} ⊆ H ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ch1) ∪ punts(ch2)},
       A,
       H − {ch1, ch2}
     )
```

A més de les regles anteriors, s'incorporen dos grups més de regles. El primer

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DAH1	RA-RP	
DAH2	CC-RP	
DAH3	RA-RT	
DAH4	CC-RT	

Taula 4.5: Regles de la configuració DAH.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
DHH1	RP-RP	
DHH2	RP-RT	
DHH3	RT-RT	

Taula 4.6: Regles de la configuració DHH.

grup consta d'una sola regla que s'anomena DDA3. La regla DDA3 permet fusionar dos conjunts **CD**, A i B, que comparteixen un punt si existeix un conjunt **CA** tal que un dels segments està inclòs en A i l'altre en B, veieu la Figura 4.7. El segon grup conté les regles que resolen els triangles definits només per restriccions d'angle entre segments i de distància perpendicular entre un punt i un segment. A continuació es descriuen les tres configuracions de regles d'aquest grup.

AAH La Taula 4.7 mostra la regla que involucra dos conjunts **CA** i un conjunt **CH**. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ {ca1, ca2} ⊆ A ∧ ch1 ∈ H ∧ 𝒞 →
     e(
       D ∪ {punts(ca1) ∪ punts(ca2) ∪ punts(ch1)},
       A − {ca1, ca2},
       H − {ch1}
     )
```

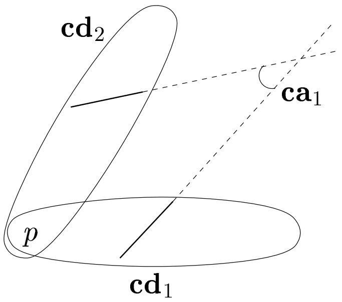


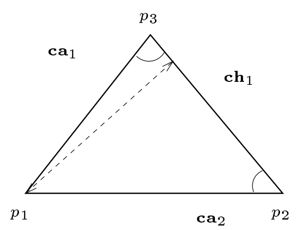
Figura 4.7: Regla DDA3: fusió de dos conjunts **CD**.

AHH La Taula 4.8 mostra les regles que involucren un conjunt **CA** i dos conjunts **CH**. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

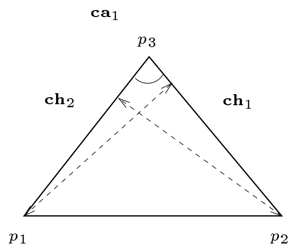
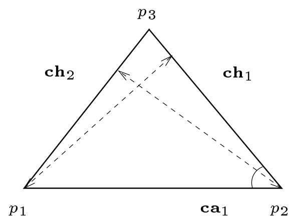
```
e(D, A, H) ∧ ca1 ∈ A ∧ {ch1, ch2} ⊆ H ∧ 𝒞 →
     e(
       D ∪ {punts(ca1) ∪ punts(ch1) ∪ punts(ch2)},
       A − {ca1},
       H − {ch1, ch2}
     )
```

HHH La Taula 4.9 mostra la regla que involucra tres conjunts **CH**. La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ {ch1, ch2, ch3} ⊆ H ∧ 𝒞 →
     e(
       D ∪ {punts(ch1) ∪ punts(ch2) ∪ punts(ch3)},
       A,
       H − {ch1, ch2, ch3}
     )
```

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
AAH		

Taula 4.7: Regla de la configuració AAH.

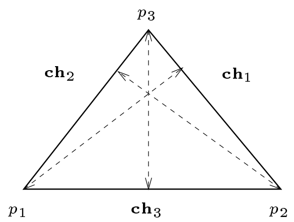
Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
AHH1		
AHH2		

Taula 4.8: Regles de la configuració AHH.

4.4 La fase de generació

A la fase de generació es tradueix la seqüència de regles aplicades tant a la fase de traducció com a la fase d'anàlisi a una seqüència d'operacions geomètriques. La seqüència d'operacions geomètriques s'expressa en el llenguatge geomètric declaratiu que es descriu a l'Apèndix C. Essencialment, un programa en llenguatge geomètric declaratiu és una seqüència de definicions de variables. Les expressions emprades en les definicions de variables contenen invocacions a les funcions geomètriques descrites a l'Apèndix C.

Les regles d'anàlisi han estat generades a partir de la combinació de dos llocs geomètrics. Per tant, la construcció geomètrica associada a cada regla serà la intersecció dels dos llocs geomètrics. Les regles de generació es descriuen en detall a la Secció D.1.3 de l'Apèndix D.

Nom	*Llocs geomètrics*	*Figura*
HHH		

Taula 4.9: Regla de la configuració HHH.

4.5 La fase de construcció

La seqüència d'operacions geomètriques obtinguda en la fase de generació és una seqüència de definicions de variables $v = e$. Les variables v són de tipus elemental o de tipus element geomètric. Els tipus elementals i d'elements geomètrics possibles es defineixen a l'Apèndix C. Les expressions e es composen d'invocacions a funcions calculables amb regle i compàs.

La descripció de la seqüència d'operacions geomètriques és purament declarativa i es pot veure com un programa escrit en un llenguatge funcional. Per tant, la fase de construcció és un intèrpret del llenguatge funcional amb el qual s'expressen les seqüències d'operacions geomètriques.

La seqüència d'operacions geomètriques descriu d'una forma sintètica les solucions d'un sistema d'equacions no lineals. Un sistema d'equacions no lineals té un nombre exponencial de solucions en els complexos, [44]. Les multiples solucions s'expressen en la seqüència d'operacions geomètriques com funcions que s'avaluen a una llista de solucions. Per tal de continuar l'avaluació cal triar una d'aquestes solucions. La selecció es pot fer segons diferents criteris que no tenen per què ser compatibles. Els criteris més són els següents: la solució desitjada per l'usuari i una solució en els reals.

El problema que es planteja quan es vol seleccionar la solució desitjada per l'usuari és definir amb precisió el concepte de solució desitjada. Fins al moment no tenim coneixement que hagi estat definit. L'opció més emprada és definir heurístics que consideren la semblança de la solució que es va obtenint amb l'esbós inicial que ha definit l'usuari, [25, 26]. Els heurístics normalment tenen en compte l'orientació i la posició relativa dels elements geomètrics en l'esbós.

El problema de trobar una solució en el reals a un problema geomètric definit en base a restriccions ha estat classificat com a *NP* per Fudos *et al.*, [25, 27]. Per tant, si els heurístics que cerquen la solució desitjada fallen no és viable cercar una solució real. Normalment, en aquesta situació, s'ofereix a l'usuari la possibilitat de navegar per l'arbre de solucions.

Capítol 5

Correctesa del mètode constructiu

Hom diu que un mètode és correcte si sempre acaba i, si obté una solució, aleshores aquesta solució satisfà totes les restriccions. En aquest capítol es demostra la correctesa del mètode constructiu. L'estructura en fases del mètode permet estructurar la demostració de la correctesa també per fases. Les fases de traducció i generació només produeixen un canvi en el format de les dades. Suposarem que aquestes fases conserven la semàntica de les dades. Així doncs, l'estudi de la correctesa es limita únicament a les fases d'anàlisi i de construcció. En aquest capítol es reelabora la demostració de la correctesa del mètode constructiu publicada en [40]. En particular, s'unifiquen la terminologia i la notació referents a sistemes de reducció abstractes seguint [47] i es justifiquen les tècniques emprades en la demostració en base als resultats teòrics exposats en [47].

5.1 La fase d'anàlisi com a sistema de reducció abstracte

El conjunt de regles generat sistemàticament en el Capítol 4 i agrupat a l'Apèndix D és el nucli de la fase d'anàlisi del mètode constructiu. Donat un problema geomètric definit en base a restriccions hom es pot preguntar si la seqüència de regles que resol el problema és única. La Figura 5.1 mostra un problema senzill que es pot resoldre mitjançant dues seqüències diferents. Les dues seqüències que resolen el problema de la Figura 5.1 són una permutació l'una de l'altra. Hom es pot preguntar si sempre serà així. Per altra banda, suposant que existeix una seqüència de regles que resol un problema, hom es pregunta si és possible que una altra seqüència no arribi a resoldre el problema.

Per tal de respondre a aquestes questions, el conjunt de regles s'expressarà com un sistema de reducció abstracte i s'estudiaran algunes de les seves propietats. En particular, es demostrarà l'acabament i la confluència, [47]. L'Apèndix B

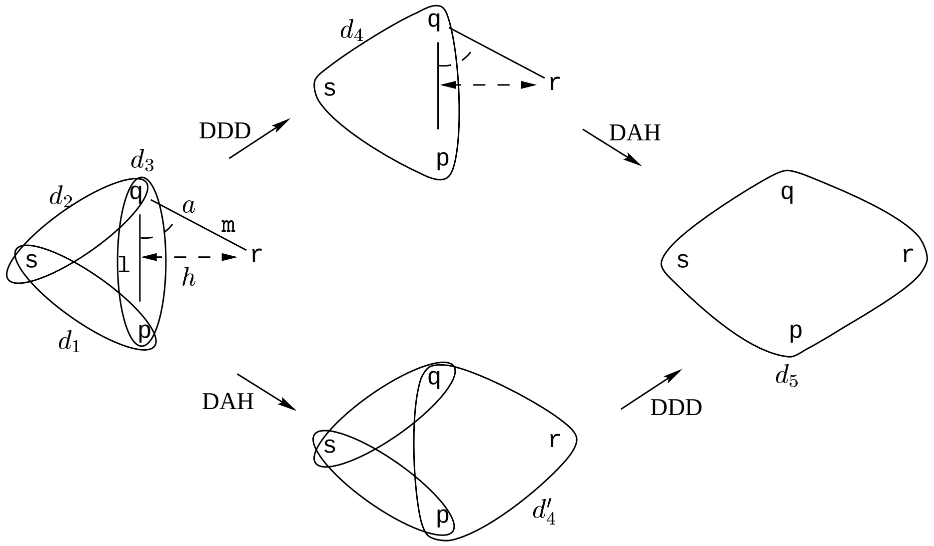


Figura 5.1: Problema resoluble per més d'una seqüècia de regles.

conté un recull de la notació i dels resultats sobre sistema de reducció abstracte que s'empren en aquesta tesi. Si un sistema de reducció abstracte és confluent, també té la propietat de forma normal única. Aquesta propietat permet afirmar que si una seqüència de regles resol el problema, tota seqüència alternativa de regles també el resol. A més, és possible deduir de la confluència local que tota seqüència de regles tindrà la mateixa longitud i que totes les seqüències de regles que resolen un cert problema són permutacions d'una mateixa seqüència.

El conjunt de regles d'anàlisi del mètode constructiu es pot veure com la relació de reducció d'un sistema de reducció abstracte sobre un conjunt d'elements de la forma (D, A, H) on D és la família de conjunts **CD**, A és la família de conjunts **CA** i H és la família de conjunts **CH**. Per tal de demostrar propietats abstractes sobre el sistema de reducció format per aquestes regles només són rellevants algunes de les condicions de les regles. En aquesta secció es factoritzaran progressivament les condicions de les regles fins a obtenir tres patrons de regles o regles genèriques. Aquests tres patrons de regles són els únics rellevants per tal de demostrar que el sistema de reducció és canònic.

El primer pas en el procés de simplificació del conjunt de regles d'anàlisi permet obtenir només sis patrons de regles. Aquests patrons es corresponen amb les configuracions de regles d'anàlisi esmentades en el Capítol 4 i que s'han anomenat DDD, DDA, DDH, DAA, DHH i DAH. Els sis patrons s'obtenen factoritzant les condicions comunes a totes les regles de la mateixa configuració i observant que les condicions no comunes són irrellevants en la fase d'anàlisi. A tall d'exemple, a continuació es presenta el procés de factorització per les regles de la configuració DDA.

Exemple 5.1. La regla genèrica de la configuració DDA és la següent:

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ca1 ∈ A ∧ 𝒞 →
  e(
    (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ca1)},
    A − {ca1},
    H
  )
```

on $\mathcal{C}$ denota les condicions particulars de cada regla d'aquesta configuració. Però, les condicions particular de les regles DDA1 i DDA2, descrites en l'Apèndix D, factoritzen en

```
𝒞 ≡ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ 𝒞'
```

i, per tant, la regla genèrica per aplicar alguna de les regles d'aquesta configuració passa a ser

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ca1 ∈ A
  ∧ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ 𝒞' →
       e(
         (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ca1)},
         A − {ca1},
         H
       )
```

Durant la fase de generació és imprescindible tenir en compte les condicions $\mathcal{C}'$ per tal de distingir les regles. Això fa que cada regla produeixi seqüències d'operacions geomètriques diferents. Per contra, en la fase d'anàlisi, l'aplicació de qualsevol de les regles de la mateixa configuració produeix exactament el mateix canvi en el terme `e`. Per aquesta raó, les condicions $\mathcal{C}'$ són irrellevants en la fase d'anàlisi i, per tant, es poden ignorar. $\Diamond$

El següent pas en la simplificació permet reduir a tres els patrons de regles. Observeu en la Figura 5.2 que les condicions de les configuracions DDA i DDH són formalment la mateixa si es prescindeix de la distinció entre conjunts **CA** i **CH**. Les configuracions DAA, DHH i DAH també són idèntiques si es prescindeix de la distinció entre conjunts **CA** i **CH**, veieu la Figura 5.3. Per tant, si s'agrupa la família A de conjunts **CA** i la família H de conjunts **CH** en una única família $X = A \cup H$ desapareix la distinció entre les configuracions DDA i DDH. Succeeix el mateix amb les configuracions DAA, DAH i DHH.

Així doncs, com a resultat del procés de formalització s'obtenen tres patrons de regles: DDD, DDX i DXX. El patró DDD coincideix amb la regla del mateix

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ca1 ∈ A
  ∧ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p} ⟶DDA
      e(
        (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ca1)},
        A − {ca1},
        H
      )

e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ch1 ∈ H
  ∧ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
  ∧ punts(ch1) − cd1 = {p} ⟶DDH
      e(
        (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ch1)},
        A,
        H − {ch1}
      )
```

Figura 5.2: Regles genèriques per les configuracions DDA i DDH.

nom, el patró DDX s'obté de les configuracions DDA i DDH i el patró DXX s'obté de les configuracions DAA, DAH i DHH. La Figura 5.4 mostra els tres patrons de regles. Les regles s'han reescrit seguint la notació de l'Apèndix B.

Amb tot el que ha estat dit, podem definir el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}$ objecte del nostre estudi.

Definició 5.1. El sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ està constituït pel conjunt d'elements R i per la regla o relació de reducció $\longrightarrow_\rho$. Els elements del conjunt R són parells de la forma (D, X) on D és una família de conjunts **CD** i $X = A \cup H$ és la unió de les famílies A i H de conjunts **CA** i **CH** respectivament. La regla $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{\mathrm{DDD}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DDX}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ és la unió de les regles genèriques resultants del procés de formalització.

Val a dir que s'han exclós del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}$ les configuracions AAH, AHH i HHH. A continuació justifiquem aquesta exclusió. Les regles d'aquestes configuracions tenen com a propietat comuna que hi intervenen únicament tres punts, restringits de diferents formes, i que produeixen com a resultat un nou conjunt **CD** que conté els tres punts. De l'estudi de cada una d'aquestes regles es dedueix que el graf de restriccions geomètriques associat a cada una d'elles és estructuralment ben restringit i que, per tant, l'aplicació d'aquestes regles conserva aquesta propietat. Els conjunts de restriccions involucrats en aquestes regles són sempre elementals i, a més, no hi ha cap altra regla que generi nous conjunts **CA** ni nous conjunts **CH**. Per aquesta raó es pot pensar que les regles de les configuracions AAH, AHH i HHH s'apliquen com un procés previ a la fase d'anàlisi. Així mateix, la fase d'anàlisi tindrà com a estat inicial els conjunts de restriccions provinents de la fase de traducció llevat

```
e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ {ca1, ca2} ⊆ A
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(ca2) − cd1 = {p} ⟶DAA
      e(
        (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ca1) ∪ punts(ca2)},
        A − {ca1, ca2},
        H
      )

e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ ca1 ∈ A ∧ ch1 ∈ H
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(ch1) − cd1 = {p} ⟶DAH
      e(
        (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ca1) ∪ punts(ch1)},
        A − {ca1},
        H − {ch1}
      )

e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ {ch1, ch2} ⊆ H
  ∧ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(ch2) − cd1 = {p} ⟶DHH
      e(
        (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ch1) ∪ punts(ch2)},
        A,
        H − {ch1, ch2}
      )
```

Figura 5.3: Regles genèriques per les configuracions DAA, DAH i DHH.

dels conjunts implicats en alguna regla de les configuracions AAH, AHH o HHH que seran substituïts pels conjunts **CD** resultants de l'aplicació d'aquestes regles. Sota aquestes condicions els resultats que s'obtindran tot seguit també són aplicables en considerar les configuracions AAH, AHH i HHH.

5.2 Correctesa de la fase d'anàlisi

A continuació es demostrarà l'acabament i la confluència del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ definit a la secció anterior. La propietat d'acabament finit garanteix que l'aplicació de la regla de reducció $\longrightarrow_\rho$ sempre acaba. La confluència permet afirmar que l'ordre d'aplicació de les regles de reducció és irrellevant o, dit d'una altra manera, que qualsevol seqüència de regles condueix a la mateixa forma normal.

5.2.1 Acabament

L'acabament finit és la primera propietat que es demostrarà sobre el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$. Aquesta propietat és important per sí

$$(D,X) \longrightarrow_{\mathrm{DDD}} ((D - \{d_1,d_2,d_3\}) \cup \{d_1 \cup d_2 \cup d_3\}, X)$$
$$\text{si} \begin{cases} \{d_1,d_2,d_3\} \subseteq D \wedge \\ d_1 \cap d_2 = \{p1\} \wedge \\ d_2 \cap d_3 = \{p2\} \wedge \\ d_1 \cap d_3 = \{p3\} \wedge \\ p_1 \neq p_2 \neq p_3 \end{cases}$$

$$(D,X) \longrightarrow_{\mathrm{DDX}} ((D - \{d_1,d_2\}) \cup \{d_1 \cup d_2 \cup \mathrm{punts}(x_1)\}, X - \{x_1\})$$
$$\text{si} \begin{cases} \{d_1,d_2\} \subseteq D \wedge \\ d_1 \cap d_2 = \{p_1\} \wedge \\ p \in d_2 - \{p_1\} \wedge \\ x_1 \in X \wedge \\ \mathrm{punts}(x_1) - d_1 = \{p\} \end{cases}$$

$$(D,X) \longrightarrow_{\mathrm{DXX}} ((D - \{d_1\}) \cup \{d_1 \cup \mathrm{punts}(x_1) \cup \mathrm{punts}(x_2)\}, X - \{x_1,x_2\})$$
$$\text{si} \begin{cases} d_1 \in D \wedge \\ \{x_1,x_2\} \subseteq X \wedge \\ \mathrm{punts}(x_1) - d_1 = \{p\} \wedge \\ \mathrm{punts}(x_2) - d_1 = \{p\} \end{cases}$$

Figura 5.4: Regles del sistema de reducció $\mathcal{R}$

mateixa, però, a més, en la Secció 5.2.5 s'usarà per demostrar la confluència de les regles a partir de la confluència feble.

Lema 5.1. *El sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ és noetherià.*

Demostració. Sigui $(D,X) \in R$ un element qualsevol. El nombre de conjunts de restriccions en (D,X) és $n = |D| + |X|$. Com que $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{\mathrm{DDD}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DDX}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ i cada una de les regles redueix en dos el nombre de conjunts de restriccions, la longitud màxima d'una seqüència de reduccions és $\lceil n/2 \rceil$. $\square$

5.2.2 Element inicial

La demostració de la confluència d'$\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ es farà sota la hipòtesi que el problema geomètric definit en base a restriccions no és estructuralment sobre-restringit. Tanmateix, un cop definit el sistema de reducció abstracte convé deslligar l'estudi de les seves propietats del problema original, el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques. Amb les definicicions següents pretenem donar condicions sobre els elements de R equivalents al concepte d'estructuralment ben restringit sobre un graf de restriccions geomètriques.

L'estat inicial de la fase d'anàlisi, que es defineix a la Secció 4.3, conté únicament conjunts de restriccions elementals on cada un d'ells es correspon amb una

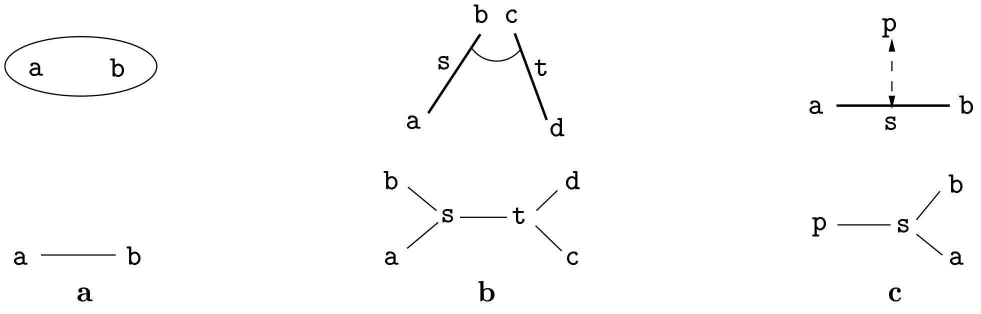


Figura 5.5: Graf de restriccions geomètriques associat (a) a un conjunt **CD** elemental, (b) a un conjunt **CA** i (c) a un conjunt **CH**.

restricció del problema. La definició d'element inicial adapta el concepte d'estat inicial de la fase d'anàlisi al context del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}$.

Definició 5.2. Anomenarem *element inicial* a tot element $C_0 = (D_0, X_0) \in R$ tal que tot conjunt $d \in D_0$ és un conjunt **CD** elemental.

El concepte d'element inicial és útil a l'hora d'expressar la propietat d'estructuralment ben restringit d'un graf de restriccions geomètriques sobre els elements d'R. A continuació s'estableix la correspondència entre els elements inicials i el grafs de restriccions geomètriques. Començarem per definir el graf de restriccions geomètriques associat a un conjunt de restriccions elemental. La definició està il·lustrada a la Figura 5.5.

Definició 5.3. Sigui $C_0 = (D_0, A_0 \cup H_0) \in R$ un element inicial de R. Direm que

1. El *graf de restriccions geomètriques associat* a un conjunt **CD** elemental $d = \{a, b\} \in D_0$ és
$$G_d = (\{a, b\}, \{(a, b)\}).$$
2. El *graf de restriccions geomètriques associat* a un conjunt **CA** $a = \{s, t\} \in A_0$, on $s = (a, b)$ i $t = (c, d)$ són segments, és
$$G_a = (\{s, t, a, b, c, d\}, \{(s, t), (a, s), (b, s), (c, t), (d, t)\}).$$
3. El *graf de restriccions geomètriques associat* a un conjunt **CH** $h = \{p, s\} \in H_0$, on $s = (a, b)$ és un segment i p un punt, és
$$G_h = (\{p, s, a, b\}, \{(p, s), (a, s), (b, s)\}).$$

A partir dels subgrafs de restriccions geomètriques associats als conjunts de restriccions elementals definim el graf de restriccions geomètriques associat a un element inicial. Siguin $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafs de restriccions geomètriques, notarem per $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ al graf de restriccions geomètriques que conté com a conjunts de vèrtexs i d'arestes la unió dels conjunts de vèrtexs i d'arestes respectivament dels grafs originals.

Definició 5.4. G_0, el *graf de restriccions geomètriques associat* a un element inicial $C_0 = (D_0, A_0 \cup H_0)$, és

$$G_0 = \bigcup_{d \in D_0} G_d \cup \bigcup_{a \in A_0} G_a \cup \bigcup_{h \in H_0} G_h$$

Exemple 5.2. El graf de restriccions geomètriques associat a l'element inicial $C_0 = (\{d_1, d_2, d_3\}, \{a, h\})$ de la Figura 5.1 és $G_0 = G_{d_1} \cup G_{d_2} \cup G_{d_3} \cup G_a \cup G_h$. Els grafs de restriccions geomètriques associats als conjunts de restriccions de C_0 són

$$\begin{aligned}
G_{d_1} &= (\{p, s\}, \{(p, s)\}) \\
G_{d_2} &= (\{q, s\}, \{(q, s)\}) \\
G_{d_3} &= (\{p, q\}, \{(p, q)\}) \\
G_a &= (\{p, q, r, l, m\}, \{(l, m), (p, l), (q, l), (q, m), (r, m)\}) \\
G_h &= (\{p, q, r, l\}, \{(r, l), (p, l), (q, l)\})
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
G_0 = \; & (\{p, q, r, s, l, m\}, \\
& \{(p, s), (q, s), (p, q), (l, m), (r, l), (p, l), (q, l), (q, m), (r, m)\}) .
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Finalment, es defineix el concepte d'element inicial estructuralment ben restringit en termes de la definició d'estructuralment ben restringit del graf de restriccions geomètriques associat.

Definició 5.5. Sigui C_0 un element inicial i G_0 el graf de restriccions geomètriques associat a C_0, aleshores

1. C_0 és *estructuralment sobre-restringit* si G_0 ho és.
2. C_0 és *estructuralment ben restringit* si G_0 ho és.
3. C_0 és *estructuralment sota-restringit* si G_0 ho és.

5.2.3 Element inicial generador d'un conjunt CD

Les regles de la fase d'anàlisi modifiquen l'estat fusionant tres conjunts de restriccions en un únic conjunt **CD**. Donat un conjunt **CD** pertanyent a un estat qualsevol de la fase d'anàlisi, ens interessa esbrinar quina és la família de conjunts de restriccions de l'estat inicial que genera aquest conjunt **CD** per successives aplicacions de les regles d'anàlisi. Aquest concepte, adaptat al context del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$, és precisament el d'element inicial generador d'un conjunt **CD**.

El concepte d'element inicial generador és fonamental a l'hora de demostrar que l'aplicació de les regles d'anàlisi conserva la propietat d'estructuralment ben restringit. Aquest serà el darrer resultat d'aquesta secció.

L'element inicial generador d'un **CD** dependrà de la seqüència de reduccions que s'han aplicat fins a generar-lo. Per una certa reducció, el graf de la reducció enregistra per cada conjunt **CD** els conjunts de restriccions dels quals prové.

Definició 5.6. Sigui $C_i \longrightarrow_\rho C_j$ una ρ-reducció en una passa. Sigui $C_i = (D_i, X_i)$ i sigui $C_j = ((D_i - \{d_1, d_2, d_3\}) \cup d, X_i - \{d_1, d_2, d_3\})$ on $\{d_1, d_2, d_3\} \subseteq D_i \cup X_i$ i $d = \{d_1 \cup d_2 \cup d_3\}$. El *graf de la reducció en una passa* $C_i \longrightarrow_\rho C_j$ és

$$G_{C_i \longrightarrow_\rho C_j} = (\{d, d_1, d_2, d_3\}, \{(d, d_1), (d, d_2), (d, d_3)\}).$$

El graf d'una reducció es defineix com la unió dels grafs de les reduccions en una passa que la composen.

Definició 5.7. Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho C_1 \longrightarrow_\rho \cdots \longrightarrow_\rho C_n \equiv C$ una ρ-reducció d'un element inicial C_0. El *graf de la reducció* $C_0 \longrightarrow_\rho^* C$ és

$$G_{C_0 \longrightarrow_\rho^* C} = \bigcup_{i=0}^{n-1} G_{C_i \longrightarrow_\rho C_{i+1}}.$$

Exemple 5.3. El graf de la reducció $C_0 \longrightarrow_{\text{DDD}} C_1 \longrightarrow_{\text{DAH}} C_2$ de la Figura 5.1 és $G_{C_0 \longrightarrow_\rho^* C_2} = G_{C_0 \longrightarrow_{\text{DDD}} C_1} \cup G_{C_1 \longrightarrow_{\text{DAH}} C_2}$ on

$$\begin{aligned} G_{C_0 \longrightarrow_{\text{DDD}} C_1} &= (\{d_1, d_2, d_3, d_4\}, \{(d_4, d_1), (d_4, d_2), (d_4, d_3)\}) \\ G_{C_1 \longrightarrow_{\text{DAH}} C_2} &= (\{d_4, d_5, a, h\}, \{(d_5, d_4), (d_5, a), (d_5, h)\}) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} G_{C_0 \longrightarrow_\rho^* C_2} = & (\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, a, h\}, \\ & \{(d_4, d_1), (d_4, d_2), (d_4, d_3), (d_5, d_4), (d_5, a), (d_5, h)\}). \end{aligned}$$

$\Diamond$

De fet, el graf d'una reducció és un arbre ternari. La definició del concepte d'element inicial generador d'un conjunt **CD** farà ús d'aquesta propietat.

Definició 5.8. Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^* C$ una ρ-reducció d'un element inicial C_0. Sigui $G_{C_0 \longrightarrow_\rho^* C}$ el graf d'aquesta reducció. Sigui $C = (D, X)$. L'*element inicial generador* d'un conjunt **CD**, $d \in D$, és l'element inicial que té com a components les fulles del subarbre d'arrel d de $G_{C_0 \longrightarrow_\rho^* C}$. El notarem per C_0^d i verifica $C_0^d \subseteq C_0$.

Exemple 5.4. L'element inicial generador de d_4 per la ρ-reducció de l'Exemple 5.3 és $C_0^{d_4} = (\{d_1, d_2, d_3\}, \emptyset)$ i el de d_5 és $C_0^{d_5} = (\{d_1, d_2, d_3\}, \{a, h\})$. $\Diamond$

La primera propietat del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ és que la regla de reducció $\longrightarrow_\rho$ conserva la propietat d'estructuralment ben restringit. Aquest resultat és fonamental per demostrar que certes configuracions de conjunts de restriccions provenen d'elements inicials estructuralment sobrerestringits.

Lema 5.2. *Si $C_0 \longrightarrow_\rho^* C$ és una ρ-reducció de l'element inicial C_0, aleshores l'element inicial generador de qualsevol conjunt* ***CD*** *en C és estructuralment ben restringit.*

Demostració. Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^* C$ on $C = (D, X)$. Es procedirà per inducció sobre l, la longitud de la reducció.

1. Cas base ($l = 0$). Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^{\equiv} C_0$ i sigui $C_0 = (D_0, X_0)$. Per ser C_0 un element inicial, tot $d \in D_0$ serà un conjunt **CD** elemental i el seu element inicial generador serà $C_0^d = \{d\}$ que és estructuralment ben restringit.

2. Hipòtesi d'inducció ($l = n$). Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho C_1 \longrightarrow_\rho \cdots \longrightarrow_\rho C_n$ i sigui $C_n = (D_n, X_n)$. Per tot $d \in D_n$, el seu element inicial generador C_0^d és estructuralment ben restringit.

3. Pas d'inducció ($l = n+1$). Sigui $C_n \longrightarrow_\rho C_{n+1}$ el darrer pas de reducció i sigui $C_{n+1} = (D_{n+1}, X_{n+1})$. Suposem que els tres conjunts de restriccions implicats en el darrer pas de reducció són $y_1, y_2, y_3 \in D_{n+1} \cup X_{n+1}$. Sigui $y = \{y_1 \cup y_2 \cup y_3\}$, aleshores $D_{n+1} = (D_n - \{y_1, y_2, y_3\}) \cup y$.

   Cal demostrar que per tot $d \in D_{n+1}$ el seu element inicial associat és estructuralment ben restringit. Com que $D_{n+1} - D_n = \{y\}$ i per hipòtesi d'inducció l'element inicial generador de tots els $d \in D_n$ és estructuralment ben restringit, només resta demostrar que C_0^y, l'element inicial associat a y, és estructuralment ben restringit.

   Distingirem tres casos:

   (a) Cas $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{DDD}$. En aquest cas, $y_1, y_2, y_3 \in D_n$ són conjunts **CD**. Sigui $G_0^{y_i}$, $1 \le i \le 3$, el graf de restriccions geomètriques associat a l'element inicial generador d'y_i i siguin m_i i n_i el nombre d'arestes i vèrtexs respectivament del graf. Les condicions d'aplicabilitat de la regla DDD impliquen que els grafs $G_0^{y_i}$ no comparteixen cap aresta. Sigui G_0^y el graf de restriccions geomètriques associat a l'element inicial generador d'y, sigui n el nombre de vèrtexs del graf i sigui m el nombre d'arestes.

   A continuació es demostra que $m = 2n - 3$. Com que els conjunts d'arestes dels grafs $G_0^{y_i}$ són disjunts, $m = m_1 + m_2 + m_3$. Substituint m_i per $2n_i - 3$ obtenim $m = 2n_1 - 3 + 2n_2 - 3 + 2n_3 - 3$. Reordenant obtenim $m = 2(n_1 + n_2 + n_3 - 3) - 3$ i com que $n = n_1 + n_2 + n_3 - 3$ perquè els grafs $G_0^{y_i}$ comparteixen un element dos a dos, obtenim $m = 2n - 3$.

   També s'ha de demostrar que per tot subgraf induït de G_0^y de n' vèrtexs i m' arestes es compleix $m' \le 2n' - 3$. Suposarem que de les arestes $m' = m'_1 + m'_2 + m'_3$, m'_i corresponen al graf $G_0^{y_i}$, $1 \le i \le 3$. Com que $m'_i \le 2n'_i - 3$ per hipòtesi d'inducció, aleshores $m' \le 2n'_1 - 3 + 2n'_2 - 3 + 2n'_3 - 3 = 2(n'_1 + n'_2 + n'_3) - 9$. Depenent del solapament dels conjunts de vèrtexs corresponents a cada un dels grafs $G_0^{y_i}$ el nombre de vèrtexs és $n' = n'_1 + n'_2 + n'_3 - k$ on $0 \le k \le 3$.

Figura 5.6: Graf de restriccions geomètriques associat a) a un conjunt **CA** i b) a un conjunt **CH** pel cas de la regla DDX.

Per tant, $m' \leq 2(n'_1 + n'_2 + n'_3 - k) - 9 + 2k = 2n' - 9 + 2k$ i com que el valor més gran de k és 3, el cas més desfavorable és $m' \leq 2n' - 3$.

(b) Cas $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{DDX}$. En aquest cas, $y_1, y_2 \in D_n$ són conjunts **CD** i y_3 és un conjunt **CA** o **CH**. Sigui $G_0^{y_i}$, $1 \leq i \leq 2$, el graf de restriccions geomètriques associat a l'element inicial generador d'y_i i siguin m_i i n_i el nombre d'arestes i vèrtexs respectivament del graf. Les condicions d'aplicabilitat de la regla DDX impliquen que els grafs $G_0^{y_i}$ no comparteixen cap aresta. A més, el graf de restriccions geomètriques associat a y_3 és de la forma de la Figura 5.6a si y_3 és un conjunt **CA** o de la forma de la Figura 5.6b si y_3 és un conjunt **CH**. Com que tant la construcció dels segments s_1 i s_2 en el cas de la Figura 5.6a com la construcció de segment s en el cas de la Figura 5.6b són 2-construccions de Henneberg [84], aleshores el graf de restriccions geomètriques g generat per y_1 amb les 2-construccions de Henneberg afegides és estructuralment ben restringit, ja que la 2-constructibilitat de Henneberg és una condició equivalent a la del Teorema de Laman; veieu el Teorema 49.1.17 de [84]. Considerant el graf de restriccions geomètriques g, $G_0^{y_2}$ i el graf format o bé per l'aresta (s_1, p) o bé per l'aresta (s, p), la situació és anàloga a la del cas 3a, tenint en compte que el graf format per una aresta és anàleg a un conjunt **CD** elemental, i, per tant, C_0^y és estructuralment ben restringit.

(c) Cas $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{DXX}$. En aquest cas, $y_1 \in D_n$ és un conjunt **CD** i y_2 i y_3 són conjunts **CA** o **CH**. Independentment de la combinació particular de conjunts **CA** i **CH**, veieu-ne un exemple a la Figura 5.7, sempre es tenen 2-construccions de Henneberg [84] i, per tant, C_0^y és estructuralment ben restringit.

□

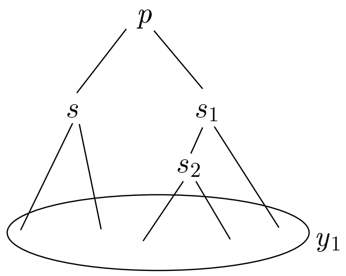


Figura 5.7: Exemple de graf de restriccions geomètriques associat als conjunts **CA** i **CH** en el cas de la regla DXX.

5.2.4 Detecció d'elements estructuralment sobre-restringits

La demostració de la confluència d'$\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ es farà sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. Certes configuracions de conjunts de restriccions només es poden obtenir partint d'elements inicials estructuralment sobre-restringit. A continuació es donen algunes condicions suficients per decidir si un element inicial és estructuralment sobre-restringit.

El primer lema estableix que si un element d'R conté dos conjunts **CD** que intersequen en més d'un punt o si un conjunt **CA** o **CH** està completament inclòs en un conjunt **CD**, aleshores l'element inicial és estructuralment sobre-restringit.

Lema 5.3. *Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^* C$ una ρ-reducció a partir de l'element inicial C_0 i sigui $C = (D, X)$. C_0 és estructuralment sobre-restringit si es dóna alguna de les condicions següents:*

1. *Existeixen $d_1, d_2 \in D$ conjunts **CD** diferents tals que $|d_1 \cap d_2| \geq 2$.*
2. *Existeix $d \in D$ un conjunt **CD** i existeix $x \in X$ un conjunt **CA** o **CH** tals que punts$(x) \subseteq d$, essent punts(x) el conjunt de punts d'x.*

Demostració. Primer es demostrarà que si existeixen $d_1, d_2 \in D$ conjunts **CD** diferents tals que $|d_1 \cap d_2| = m \geq 2$ aleshores C_0 és estructuralment sobre-restringit. Pel Lema 5.2, els elements inicials generadors de d_1 i d_2, $C_0^{d_1}$ i $C_0^{d_2}$ respectivament, són estructuralment ben restringits i els grafs de restriccions geomètriques associats tenen n_1 i n_2 nodes respectivament i $2n_1 - 3$ i $2n_2 - 3$ arestes respectivament. El graf de restriccions geomètriques associat a $d_1 \cap d_2$ conté $n = n_1 + n_2 - m$ nodes i $(2n_1 - 3) + (2n_2 - 3) = 2(n_1 + n_2) - 6 = 2n + 2m - 6$ arestes. Com que $m \geq 2$, aleshores $2n + 2m - 6 \geq 2n - 2 > 2n - 3$ i, per tant, C_0 és estructuralment sobre-restringit.

En segon lloc, es demostrarà que si existeix $d \in D$ un conjunt **CD** i existeix $x \in X$ un conjunt **CA** o **CH** tals que punts$(x) \subseteq d$, aleshores C_0 és estructuralment sobre-restringit. Pel Lema 5.2, C_0^d, l'element inicial generador de d, és estructuralment ben restringit i G_d, el graf de restriccions geomètriques associat a C_0^d, té n nodes i $2n-3$ arestes. Sigui G_x el graf de restriccions geomètriques associat a x. Considerem $G = G_d \cup G_x$ i siguin $n' = |V(G)|$ i $m' = |E(G)|$. El cas més desfavorable és que $V(G_x) \cap V(G_d) = V(G_x)$ i $|E(G_x) \cap E(G_d)| = |E(G_x)| - 1$. Aleshores $n' = n$ i $m' = (2n-3)+1 = 2n-2 > 2n'-3$. Per tant, C_0 és estructuralment sobre-restringit. □

El següent lema estableix que si es poden aplicar dues regles diferents a un mateix element d'R i les dues regles comparteixen un mateix conjunt **CA** o **CH**, aleshores l'element inicial és estructuralment sobre-restringit.

Lema 5.4. *Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^* C_i$ una ρ-reducció a partir de l'element inicial C_0. Si existeixen C_j i C_j' tals que $C_j \longleftarrow_r C_i \longrightarrow_{r'} C_j'$, els conjunts de restriccions implicats en la regla r són $c_1, c_2, c_3 \in C_i$ i en la regla r' són $c_1', c_2', c_3 \in C_i$, i el conjunt de restriccions compartit c_3 és un conjunt **CA** o **CH**, aleshores C_0 és estructuralment sobre-restringit.*

Demostració. Suposem que c_1 i c_1' són els conjunts **CD** de referència de les resgles r i r' respectivament. Com que $|c_3 - c_1| = |c_3 - c_1'| = |c_3| - 1$ per les condicions d'aplicabilitat de la regla DDX i $|c_3| \geq 3$ per definició de conjunt **CA** o **CH**, aleshores $|c_3 - c_1| = |c_3 - c_1'| \geq 2$. Suposem que s'aplica la regla r en primer lloc, aleshores $d_4 = c_1 \cup c_2$. Com que $c_3 \subseteq d_4$ succeeix que $|d_4 \cap c_1'| \geq 2$ i pel Lema 5.3(1), l'element inicial C_0 és estructuralment sobre-restringit. El cas en el qual r' s'aplica en primer lloc és anàleg. □

Finalment, l'element inicial és estructuralment sobre-restringit quan és possible aplicar dues regles diferents sobre un mateix element d'R i les dues regles comparteixen més d'un conjunt de restriccions.

Lema 5.5. *Sigui $C_0 \longrightarrow_\rho^* C_i$ una ρ-reducció a partir de l'element inicial C_0. Si existeixen C_j i C_j' tals que $C_j \longleftarrow_r C_i \longrightarrow_{r'} C_j'$, i que els conjunts de restriccions implicats en la regla r són $c_1, c_2, c_3 \in C_i$ i en la regla r' són $c_1', c_2, c_3 \in C_i$ essent c_2 i c_3 els dos conjunts de restriccions compartits, aleshores C_0 és estructuralment sobre-restringit.*

Demostració. Veieu la Figura 5.10. En funció del tipus dels conjunts de restriccions c_2 i c_3 es poden distingir tres casos: són dos conjunts **CD**, són un conjunt **CD** i un conjunt **CA** o **CH** o són dos conjunt **CA** o **CH**. Sempre que un dels conjunts de restriccions compartits sigui un **CA** o un **CH**, l'element inicial C_0 serà estructuralment sobre-restringit pel Lema 5.4. Per tant, només queda per demostrar que també és així quan els dos conjunts de restriccions compartits són conjunts **CD**.

Suposem que c_1' és un conjunt **CD** i suposem que s'ha aplicat la regla r en primer lloc. Aleshores $|d_4 \cap c_1'| \geq 2$ essent $d_4 = c_1 \cup c_2 \cup c_3$ perquè inicialment, $|c_2 \cap c_1'| = 1$ i $|c_3 \cap c_1'| = 1$. Això implica, pel Lema 5.3(1), que l'element inicial C_0 és estructuralment sobre-restringit. El raonament pel cas que r' s'apliqui en primer lloc és anàleg.

Suposem que c_1' és un conjunt **CA** o **CH** i suposem que s'ha aplicat la regla r en primer lloc. Aleshores, $c_1' \subseteq d_4$ essent $d_4 = c_1 \cup c_2 \cup c_3$ perquè $c_1' \subseteq c_2 \cup c_3$. Això implica, pel Lema 5.3(2), que hi ha un element inicial estructuralment sobre-restringit. Suposant que s'ha aplicat r' en primer lloc, $|d_4' \cap c_1| \geq 2$ perquè $d_4' = c_2 \cup c_3$ i, inicialment, $|c_2 \cap c_1| = 1$ i $|c_3 \cap c_1| = 1$. Això implica, pel Lema 5.3(1), que l'element inicial C_0 és estructuralment sobre-restringit. □

5.2.5 Confluència

Una propietat especialment important dels sistema de reducció abstracte és la confluència. La principal motivació per estudiar aquesta propietat d'un sistema de reducció abstracte rau en el fet que la confluència garanteix la unicitat de les formes normals. Això permet comprobar l'equivalència de dos elements verificant la identitat de les seves formes normals. A més, garanteix que l'ordre d'aplicació de les regles és irrellevant.

La demostració de la confluència del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ farà ús del Teorema B.2. Com que $\longrightarrow_\rho = \longrightarrow_{\mathrm{DDD}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DDX}} \cup \longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ n'hi haurà prou amb demostrar que tot parell de regles $\longrightarrow_{\mathrm{DDD}}$, $\longrightarrow_{\mathrm{DDX}}$ i $\longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ commuta, inclòs el cas que cada regla commuta amb ella mateixa.

Per tal de demostrar que les regles commuten per parelles s'aplicarà el Teorema B.1(1). Pel Lema 5.1 el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}$ és noetherià. Per tant, per demostrar que dues regles commuten n'hi haurà prou amb demostrar que commuten feblement.

Lema 5.6. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DDD commuta amb ella mateixa.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que la regla DDD és feblement confluent. Segons el nombre de conjunts **CD** diferents que intervinguin en les regles es distingiran tres casos:

1. Sis conjunts **CD** diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, tots els conjunts de restriccions, c_i i c_j' són conjunts **CD** i les regles, r i r', són DDD. Clarament, r i r' commuten sempre.

2. Cinc conjunts **CD** diferents, veieu la Figura 5.9. En aquest cas, tots els conjunts de restriccions, c_i i c_j', són conjunts **CD** i les regles, r i r', són DDD. Siguin $c_1 \cap c_3 = \{p_3\}$, $c_2 \cap c_3 = \{p_2\}$, $c_1' \cap c_3 = \{p_3'\}$ i $c_2' \cap c_3 = \{p_2'\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $d_4 \cap c_1' = \{p_3'\}$ i $d_4 \cap c_2' = \{p_2'\}$. Aquestes condicions es compleixen per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. El cas en el qual primer s'aplica la regla r' és anàleg. És

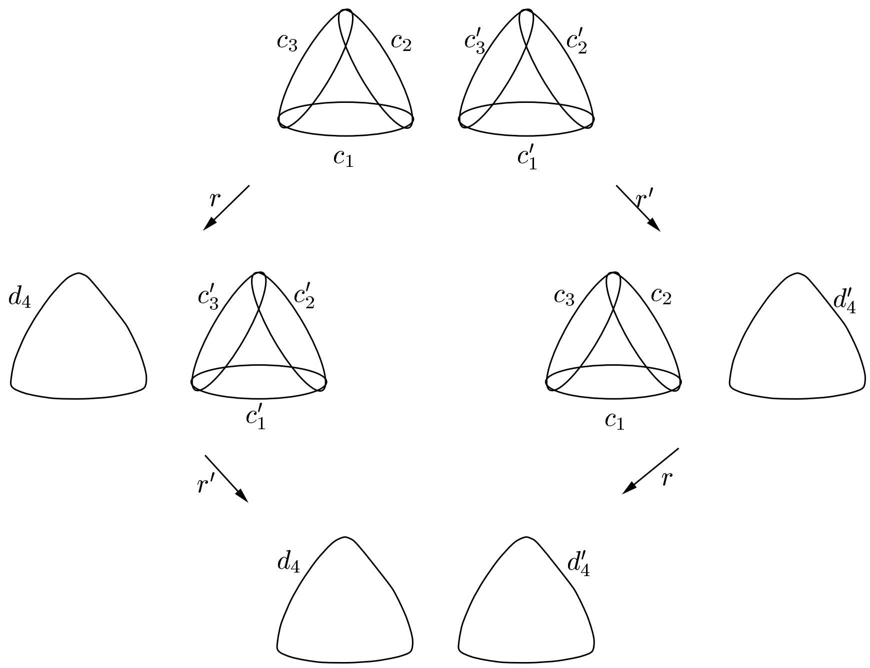


Figura 5.8: Sis conjunts de restriccions diferents.

clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final on d_5 és el conjunt **CD** que conté tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

3. Quatre conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.10. Pel Lema 5.5, aquest cas no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\text{DDD}}$ és confluent, per ser $\longrightarrow_{\text{DDD}}$ noetheriana i feblement confluent. $\square$

Lema 5.7. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial de R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DDD commuta amb la regla DDX.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que les regles DDD i DDX commuten feblement. Segons el nombre de conjunts de restriccions diferents que intervinguin en les regles es distingiran tres casos:

1. Sis conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i per $i \in [1, 3]$ i c_j' per $i \in [2, 3]$ són conjunts **CD** i c_1' és un conjunt **CA** o **CH**. Les regles r i r' són DDD i DDX respectivament. Clarament, r i r' commuten sempre.

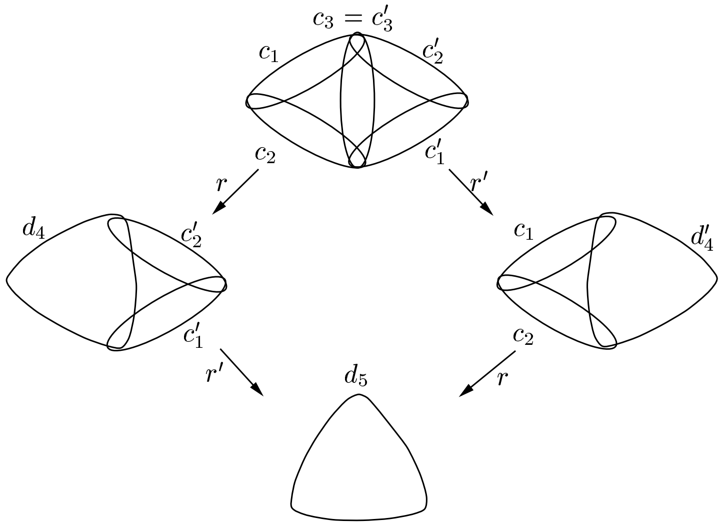


Figura 5.9: Cinc conjunts de restriccions diferents.

2. Cinc conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.9. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i per $i \in [1,3]$ i c_j' per $i \in [2,3]$ són conjunts **CD** i c_1' és un conjunt **CA** o **CH**. Siguin $c_1 \cap c_3 = \{p_3\}$, $c_2 \cap c_3 = \{p_2\}$ i $c_2' \cap c_3 = \{p_2'\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $d_4 \cap c_2' = \{p_2'\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

   Suposant que s'ha aplicat r' en primer lloc, r només serà aplicable si es compleix $d_4' \cap c_1 = \{p_3\}$ i $d_4' \cap c_2 = \{p_2\}$. Aquestes condicions es compleixen per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. És clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final que conté un conjunt **CD**, d_5 amb tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

3. Quatre conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.10. Pel Lema 5.5, aquest cas no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\mathrm{DDD}}$ i $\longrightarrow_{\mathrm{DDX}}$ commuten, per ser noetherianes i commutar feblement. □

Lema 5.8. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DDD commuta amb la regla DXX.

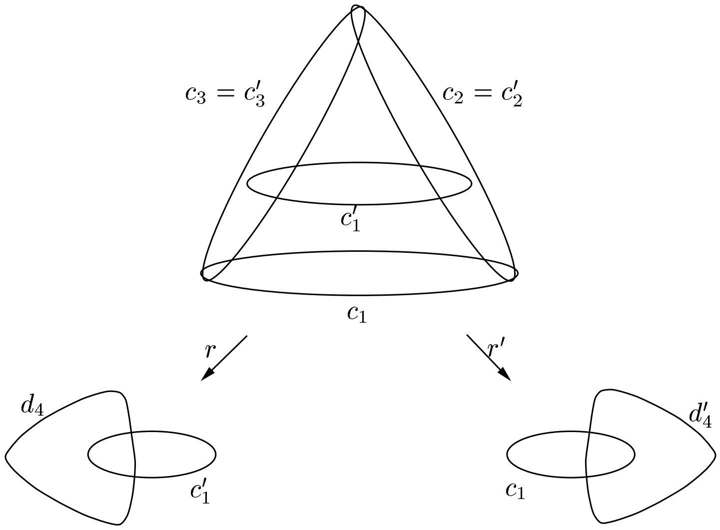


Figura 5.10: Quatre conjunts de restriccions diferents.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que les regles DDD i DXX commuten feblement. Segons el nombre de conjunts de restriccions diferents que intervinguin en les regles es distingiran dos casos:

1. Sis conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i per $i \in [1, 3]$ i c_3' són conjunts **CD** i c_k' per $k \in [1, 2]$ són un conjunts **CA** o **CH**. Les regles r i r' són DDD i DXX respectivament. Clarament, r i r' commuten sempre.

2. Cinc conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.9. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i per $i \in [1, 3]$ i c_3' són conjunts **CD** i c_k' per $k \in [1, 2]$ són un conjunts **CA** o **CH**. Siguin $c_1 \cap c_3 = \{p_3\}$, $c_2 \cap c_3 = \{p_2\}$, $c_1' - c_3 = \{p'\}$ i $c_2' - c_3 = \{p'\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $c_1' - d_4 = \{p'\}$ i $c_2' - d_4 = \{p'\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

   Suposant que s'ha aplicat r' en primer lloc, r només serà aplicable si es compleix $d_4' \cap c_1 = \{p_3\}$ i $d_4' \cap c_2 = \{p_2\}$. Aquestes condicions es compleixen per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. És clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final que conté un conjunt **CD**, d_5 amb tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\mathrm{DDD}}$ i $\longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ commuten, per ser noetherianes i commutar feblement. $\square$

Lema 5.9. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial de R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DDX commuta amb ella mateixa.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que la regla DDX és feblement confluent. Segons el nombre de conjunts de restriccions diferents que intervinguin en les regles es distingiran tres casos:

1. Sis conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i i c'_j per $i, j \in [2,3]$ són conjunts **CD** i c_1 i c'_1 són conjunts **CA** o **CH**. Les regles, r i r', són DDX. Clarament, r i r' commuten sempre.

2. Cinc conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.9. Suposem que el conjunt de restriccions compartit sigui un conjunt **CD**. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i i c'_j per $i, j \in [2,3]$ són conjunts **CD** i c_1 i c'_1 són conjunts **CA** o **CH**. Siguin $c_2 \cap c_3 = \{p_2\}$ i $c'_2 \cap c_3 = \{p'_2\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $d_4 \cap c'_2 = \{p'_2\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. El cas en el qual primer s'aplica la regla r' és anàleg. És clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final que conté un mateix conjunt **CD**, d_5, que conté tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

   Pel Lema 5.4, el cas en el qual el conjunt de restriccions compartit és un conjunt **CA** o **CH** no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

3. Quatre conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.10. Pel Lema 5.5, aquest cas no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\mathrm{DDX}}$ és confluent, per ser noetheriana i feblement confluent. $\square$

Lema 5.10. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DDX commuta amb la regla DXX.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que les regles DDX i DXX commuten feblement. Segons el nombre de conjunts de restriccions diferents que intervinguin en les regles es distingiran tres casos:

1. Sis conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, els conjunts de restriccions c_i per $i \in [2,3]$ i c'_3 són conjunts **CD** i c_1 i c'_j per $j \in [1,2]$ són conjunts **CA** o **CH**. Les regles r i r' són DDX i DXX respectivament. Clarament, r i r' commuten sempre.

2. Cinc conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.9. Suposem que el conjunt de restriccions compartit sigui un conjunt **CD**. c_i per $i \in [2,3]$ i c'_3 són conjunts **CD** i c_1 i c'_j per $j \in [1,2]$ són conjunts **CA** o **CH**. Siguin $c_2 \cap c_3 = \{p_2\}$ i $c'_1 - c_3 = c'_2 - c_3 = \{p'\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $c'_1 - d_4 = c'_2 - d_4 = \{p'\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. Suposant que s'ha aplicat la regla r' en primer lloc, r només serà aplicable si es compleix $c_2 \cap d_4 = \{p_2\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. És clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final que conté un mateix conjunt **CD**, d_5, que conté tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

   Pel Lema 5.4, el cas en el qual el conjunt de restriccions compartit és un conjunt **CA** o **CH** no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

3. Quatre conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.10. Pel Lema 5.5, aquest cas no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\mathrm{DDX}}$ i $\longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ commuten, per ser noetherianes i commutar feblement. □

Lema 5.11. *Sigui el sistema de reducció abstracte*

$$\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{DDD}, \longrightarrow_{DDX}, \longrightarrow_{DXX} \rangle.$$

Si cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla DXX commuta amb ella mateixa.

Demostració. En primer lloc es demostrarà que la regla DXX és feblement confluent. Segons el nombre de conjunts de restriccions diferents que intervinguin en les regles es distingiran tres casos:

1. Sis conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.8. En aquest cas, el conjunt de restriccions c_3 i c'_3 són conjunts **CD** i c_i i c'_j per $i, j \in [1,2]$ són conjunts **CA** o **CH**. Les regles, r i r', són DXX. Clarament, r i r' commuten sempre.

2. Cinc conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.9. Suposem que el conjunt de restriccions compartit sigui un conjunt **CD**. En aquest cas els conjunts de restriccions $c_3 = c'_3$ és un conjunt **CD** i c_i i c'_j per $i, j \in [1,2]$ són conjunts **CA** o **CH**. Siguin $c_1 - c_3 = c_2 - c_3 = \{p\}$ i $c'_1 - c_3 = c'_2 - c_3 = \{p'\}$. Suposant que s'ha aplicat la regla r en primer lloc, r' només serà aplicable si es compleix $c'_1 - d_4 = c'_2 - d_4 = \{p'\}$. Aquesta condició es compleix per la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit. El cas en el qual primer s'aplica la

regla r' és anàleg. És clar que les dues reduccions condueixen al mateix estat final que conté un mateix conjunt **CD**, d_5, que conté tots els punts dels conjunts de restriccions inicials.

Pel Lema 5.4, el cas en el qual el conjunt de restriccions compartit és un conjunt **CA** o **CH** no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

3. Quatre conjunts de restriccions diferents, veieu la Figura 5.10. Pel Lema 5.5, aquest cas no és possible sota la hipòtesi que cap element inicial d'R és estructuralment sobre-restringit.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\mathrm{DXX}}$ és confluent, per ser noetheriana i feblement confluent. □

Un cop demostrat que tot parell de regles del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}'$ commuten, la confluència d'$\mathcal{R}$ és una conseqüència directa del Teorema B.2.

Teorema 5.1. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$. Si cap element inicial de R és estructuralment sobre-restringit, aleshores $\mathcal{R}$ és confluent.*

Demostració. Als Lemes 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 i 5.11 s'ha demostrat que tot parell de regles del sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}' = \langle R, \longrightarrow_{\mathrm{DDD}}, \longrightarrow_{\mathrm{DDX}}, \longrightarrow_{\mathrm{DXX}} \rangle$ commuta. Per tant, pel Teorema B.2, $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$ és confluent. □

5.2.6 Canonicitat

Una conseqüència directa del Lema 5.1 i del Teorema 5.1 és que el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R}$ és canònic.

Corol·lari 5.1. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{R} = \langle R, \longrightarrow_\rho \rangle$. Si cap element inicial de R és estructuralment sobre-restringit, aleshores $\mathcal{R}$ és canònic.*

5.3 Correctesa de la Fase de Construcció

La canonicitat de la fase d'anàlisi implica que, independentment de la seqüència de regles que s'apliqui, s'arriba a la mateixa forma normal. Tanmateix, és possible arribar a la mateixa forma normal mitjançant dues seqüències de regles d'anàlisi diferents. Per descomptat que dues seqüències d'anàlisi diferents produeixen dues seqüències d'operacions geomètriques, en principi, diferents. El problema que ens plantegem és si aquestes dues seqüències d'operacions geomètriques representen el mateix espai de solucions. Direm que dues solucions són *congruents* si una es pot transformar en l'altra aplicant només rotacions i translacions. Aleshores dues seqüències d'operacions geomètriques representen el mateix espai de solucions si per cada solució obtinguda per la primera seqüència d'operacions geomètriques existeix una solució congruent obtinguda per la segona seqüència d'operacions geomètriques i viceversa.

Del Corol·lari 5.1 es dedueix que tota seqüència de regles d'anàlisi té la mateixa longitud i, encara més, que són permutacions d'una mateixa seqüència. Cada regla d'anàlisi produeix una seqüència d'operacions geomètriques que involucra els mateixos elements geomètrics independentment del moment en què s'hagi aplicat.

Les seqüències d'operacions geomètriques, de fet, no tenen una estructura seqüencial sinó que s'estructuren com un graf acíclic orientat. Els nodes del graf són les variables que es defineixen en la seqüència d'operacions geomètriques i hi ha un arc entre la variable a i la variable b si a apareix en l'expressió que calcula b.

D'aquests dos fets s'en deriva que les dues seqüències d'operacions geomètriques difereixen només en els sistemes de referència dels elements geomètrics que intervenen en les regles d'anàlisi que commuten. Cal tenir en compte que quan una regla posiciona un conjunt d'elements geomètrics respecte d'un mateix sistema de referència, en endavant, a aquests mateixos elements geomètrics nomès se'ls aplicaran transformacions geomètriques. Com que les transformacions geomètriques conserven les posicions relatives entre els elements, és possible substituir les referències a elements geomètrics en operacions que calculin informació independent del sistema de referència, per exemple, distàncies i angles, per la seva posició respecte del primer conjunt **CD** que els conté. La seqüència d'operacions geomètriques resultant d'aplicar aquestes substitucions es pot considerar la forma normal de les seqüències d'operacions geomètriques corresponents a permutacions d'una mateixa seqüència de regles aplicades. Això implica que dues seqüències d'operacions geomètriques provinents de dues seqüències de regles d'anàlisi sobre el mateix problema tenen el mateix espai de solucions.

Podeu trobar una altra visió de la correctesa de la fase de construcció a [25, 26].

Capítol 6

Un mètode híbrid

Fins ara s'ha abordat el problema de la satisfacció de restriccions geomètriques amb restriccions geomètriques valuades. Al present capítol es consideren problemes on intervenen restriccions valuades, restriccions simbòliques i equacions que relacionen les variables de les restriccions simbòliques amb variables externes. En primer lloc es justifica la necessitat d'un mètode de satisfacció de restriccions geomètriques híbrid. A continuació es comenten breument algunes tècniques d'anàlisi de sistemes d'equacions que s'empraran en el mètode híbrid. A partir d'aquest punt es descriuen les regles que estenen el mètode constructiu per tal de permetre el tractament de restriccions simbòliques i equacions. La descrició de les regles s'estructura en les fases de traducció, anàlisi, generació i construcció. Finalment, s'estudia l'àmbit d'aplicació del mètode. En aquest capítol es descriu amb més profunditat el mètode híbrid descrit prèviament en [42].

6.1 Introducció

Els problemes geomètrics amb restriccions valuades, restriccions simbliques i equacions s'aborden molt sovint transformant les restriccions del domini geomètric a l'equacional. El mètode híbrid que presentem en aquest capítol no requereix transformar el problema d'un domini a l'altre. Això s'aconsegueix combinant un mètode constructiu amb la resolució de sistemes d'equacions algebraiques. D'aquesta manera, conservem els avantatges dels mètodes constructius com ara la generació d'una solució constructiva del problema o l'estructuració en les fases de traducció, anàlisi, generació i construcció.

Per tal de generar una solució constructiva convé recórrer a la resolució de sistemes d'equacions només quan és imprescindible, és a dir, quan la resolució del problema requereix el càlcul del valor d'alguna variable. Per tal de mantenir les mateixes fases que en el mètode constructiu, i específicament la fase d'anàlisi, cal recórrer a tècniques d'anàlisi estructural de sistemes d'equacions.

El mètode híbrid que proposem estén el mètode de Hoffmann i Joan-Arinyo,

[33], en els aspectes següents. En primer lloc, describim el mètode mitjançant regles de reducció, la qual cosa elimina la necessitat d'expressar el mètode com un algorisme i alhora possibilita la derivació d'algorismes eficients a partir de les propietats del sistema de reducció. En segon lloc, introduïm el concepte de *restricció d'un graf bipartit per un conjunt de restriccions* en l'anàlisi de sistemes d'equacions. Això ens permet, per una banda, subsumir en una única regla totes les regles implicades en l'anàlisi de sistemes d'equacions i, per l'altra, estendre el domini del mètode en considerar problemes que involucrin elements geomètrics amb més de dos graus de llibertat com, per exemple, arcs i cercles amb radi desconegut, sense necessitat d'estendre el repertori de regles.

6.2 Anàlisi estructural de sistemes d'equacions

Les tècniques d'anàlisi estructural de sistemes d'equacions que emprem han estat estudiades per Murota, [63]. En aquest treball, Murota formalitza el concepte de sistema d'equacions *estructuralment resoluble*. Intuïtivament es tracta de determinar quan un sistema d'equacions té una estructura que admeti una solució única en el cas general. Murota estudia el graf associat al sistema d'equacions i obté, per una banda, condicions que permeten determinar si el sistema és estructuralment resoluble i, per l'altra, diferents descomposicions del sistema que redueixen el cost computacional de la resolució.

A continuació es reprodueixen per motius de completesa de l'exposició els conceptes de la teoria que presenta Murota. Començarem definint el concepte de graf bipartit associat a un sistema d'equacions, per continuar estudiant la descomposició canònica de Dulmage-Mendelsohn tot establint la relació amb el concepte de sistema d'equacions estructuralment resoluble.

6.2.1 Graf bipartit associat a un sistema d'equacions

L'Apèndix A conté un recull de la terminologia i de la notació de teoria de grafs que s'emprarà a continuació. Tot seguit es defineix el concepte de graf bipartit associat a un sistema d'equacions.

Definició 6.1. Sigui F un conjunt d'equacions i X el conjunt de variables que apareixen en les equacions. Sigui E el conjunt de parells (f, x) amb $f \in F$ i $x \in X$ tals que la variable x apareix a l'equació f. Direm que $B = (F, X, E)$ és el *graf bipartit associat al sistema d'equacions* F.

La primera condició per tal de decidir si un sistema d'equacions és estructuralment resoluble basada en les propietats del graf bipartit associat al sistema que presenta Murota, [63], és la següent.

Teorema 6.1. *Un sistema d'equacions és estructuralment resoluble si i només si existeix un aparellament perfecte en el seu graf bipartit associat.*

A partir d'aquest resultat, Murota estudia l'ús de descomposicions sobre el graf bipartit associat al sistema d'equacions que revelin l'estructura del sistema. A continuació es descriu la descomposició de Dulmage-Mendelsohn d'un graf bipartit i com s'aplicarà a l'anàlisi de sistemes d'equacions.

6.2.2 Descomposició de Dulmage-Mendelsohn

Un sistema d'equacions es pot descompondre en subsistemes estructuralment resolubles a partir de la descomposició del seu graf bipartit associat. Tot graf bipartit té una descomposició canònica en subgrafs bipartits irreductibles sobre els quals es pot definir una relació d'ordre parcial, [61]. Aquesta descomposició fou proposada originalment per Dulmage-Mendelsohn i l'anomenarem *DM-descomposició*. Als subgrafs bipartits irreductibles que resulten de la DM-descomposició els anomenarem *DM-components*.

Sigui M un aparellament en B. A partir de l'aparellament M definim el conjunt d'arcs $\tilde{E} = E \cup \{(x,f) \mid (f,x) \in M\}$ i els subconjunts dels vèrtexs $\tilde{F} = F - \rho_B^+(M)$ i $\tilde{X} = X - \rho_G^-(M)$ que anomenarem *entrada* i *sortida* respectivament. Sigui $G_M = (F \cup X, \tilde{E}; \tilde{F}, \tilde{X})$ el *graf auxiliar associat a l'aparellament* M del qual es distingeixen els conjunts de vèrtexs entrada, $\tilde{F}$, i sortida, $\tilde{X}$. La DM-descomposició del graf bipartit $B = (F, X, E)$, que notarem per $\mathcal{D}(B)$, es pot calcular mitjançant l'algorisme següent, [63].

1. Calculeu un aparellament màxim M en B.
2. Sigui $V_0 = \left\{v \in F \cup X \mid f \xrightarrow{*}_{G_M} v \text{ per algun } f \in \tilde{F}\right\}$.
3. Sigui $V_\infty = \left\{v \in F \cup X \mid v \xrightarrow{*}_{G_M} x \text{ per algun } x \in \tilde{X}\right\}$.
4. Siguin V_i, $1 \le i \le r$, els components forts del graf que s'obté a partir de G_M tot esborrant els vèrtex de $V_0 \cup V_\infty$ i els arcs que hi incideixen.
5. Definiu l'ordre parcial $\prec$ entre V_i, $i = 0, 1, \ldots, r, \infty$, com segueix.
$$V_i \prec V_j \Leftrightarrow v_j \xrightarrow{*}_{G_M} v_i \text{ per algun } v_i \in V_i \text{ i } v_j \in V_j.$$

Siguin $V_i = F_i \cup X_i$, $i = 0, 1, \ldots, r, \infty$, on $F_i \subseteq F$ i $X_i \subseteq X$. Els DM-components $B_i = (F_i, X_i, A_i)$ són els subgrafs bipartits induïts pels conjunts de vèrtexs F_i i X_i. Així doncs, el resultat de la DM-descomposició d'un graf bipartit B és un ordre parcial $\mathcal{D}(B) = (\{B_0, B_1, \ldots, B_r, B_\infty\}, \prec)$ sobre el conjunt de components. La relació d'ordre parcial entres els components es defineix com $B_i \prec B_j$ si i només si $V_i \prec V_j$. La DM-descomposició és canònica en el sentit que és independent de l'aparellament màxim del qual es parteix.

Anomenarem al component B_0 la *part inconsistent minimal*, al component B_∞ la *part inconsistent maximal* i a la resta de components la *part consistent*. La Figura 6.1 mostra la DM-descomposició d'un graf bipartit B. La relació d'ordre parcial entre els components és, en aquest cas, $B_0 \prec B_2 \prec B_\infty$ i $B_0 \prec B_1$.

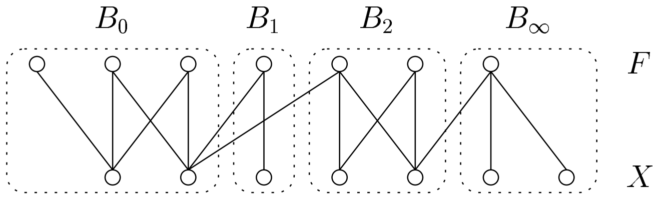


Figura 6.1: DM-descomposició d'un graf bipartit $B = (F, X, E)$.

A partir de la DM-descomposició del graf bipartit $B = (F, X, E)$ associat al sistema d'equacions F es pot obtenir una condició per decidir si F és estructuralment resoluble equivalent a la del Teorema 6.1, [63].

Teorema 6.2. *Un sistema d'equacions és estructuralment resoluble si i només si són buits els components B_0 i B_∞ de la DM-descomposició del seu graf bipartit associat.*

Els DM-components B_i, $1 \leq i \leq r$, de la part consistent es corresponen amb subconjunts d'equacions d'F que són estructuralment resolubles i que no es poden descompondre més, tot mantenint la propietat que siguin estructuralment resolubles. El subconjunt d'equacions que es correspon amb B_∞ és sotadeterminat, és a dir, conté més variables que equacions, i el subconjunt d'equacions que es correspon amb B_0 és sobredeterminat, és a dir, conté més equacions que variables.

En el mètode híbrid que es proposarà en les seccions successives no sempre s'analitza el sistema d'equacions complet i, per tant, és possible que el sistema sigui sotadeterminat. En aquest cas estem interessats en la resolució dels components de la part consistent mentre que posposarem la resolució de la part inconsistent minimal, és a dir, de la part sotadeterminada. És per això que en la proposició següent es relaxa el Teorema 6.2.

Proposició 6.1. *Els subsistemes associats als components de la part consistent de la DM-descomposició del graf bipartit associat a un sistema d'equacions són estructuralment resolubles si i només si el component B_0 és buit.*

La Proposició 6.1 permet prosseguir l'anàlisi havent eliminat del graf bipartit associat al sistema d'equacions els components de la part consistent.

6.3 La fase de traducció

La fase de traducció en el mètode híbrid té el mateix propòsit que en el mètode constructiu. En primer lloc, es transformen les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles amb radi desconegut en restriccions simbòliques de distància entre punts o entre un punt i un segment. La traducció d'aquestes restriccions és anàloga al cas en el qual el radi del cercle és conegut, veieu la

Secció D.2.1 de l'Apèndix D. En segon lloc, les restriccions simbòliques i les equacions es converteixen a una representació interna més adient, en aquest cas, el graf bipartit associat al sistema d'equacions i a les restriccions simbòliques.

Les restriccions geomètriques simbòliques es caracteritzen per tenir com a dimensió un valor variable. És clar, doncs, que les restriccions simbòliques també han d'estar representades al graf bipartit associat a les equacions. A més, el mètode híbrid permetrà posicionar elements geomètrics mitjançant la regla d'anàlisi equacional quan aquests intervinguin només en restriccions simbòliques. Per tant, cal associar a cada element geomètric que intervingui en una restricció geomètrica simbòlica un parell de variables corresponents als graus de llibertat d'aquest element. Anomenem a aquestes variables *variables geomètriques*.

Més formalment, sigui P un problema geomètric definit en base a restriccions. Sigui F_e el conjunt d'equacions de P i sigui F_s el conjunt d'equacions generat per les restriccions geomètriques simbòliques de P. Sigui X_e el conjunt de variables externes que apareixen en les equacions de P i siguin X_d el conjunt de variables dimensionals i X_g el conjunt de variables geomètriques que apareixen en les restriccions geomètriques simbòliques de P. Siguin $F = F_e \cup F_s$ i $X = X_e \cup X_d \cup X_g$, i sigui E el conjunt d'arcs definit pels parells (f, x), amb $f \in F$ i $x \in X$, tals que la variable x apareix en l'equació f. Direm que $B = (F, X, E)$ és el graf bipartit associat al problema geomètric definit en base a restriccions. De fet, el graf bipartit B representa l'*estat de l'anàlisi equacional*, mentre que la família de conjunts de restriccions representa l'*estat de l'anàlisi geomètrica*. Noteu que el conjunt d'arcs es pot dividir en dos conjunts disjunts $E_e \subseteq F_e \times (X_e \cup X_d)$ i $E_s \subseteq F_s \times (X_g \cup X_d)$ que es corresponen amb els arcs entre les equacions i les variables dimensionals i externes i amb els arcs entre les restriccions geomètriques simbòliques i les variables dimensionals i geomètriques respectivament.

6.4 La fase d'anàlisi

El mètode híbrid introdueix una nova regla d'anàlisi. El nucli de la regla és la DM-descomposició del graf bipartit B. Si la part consistent de la descomposició de Dulmage-Mendelsohn és estructuralment resoluble, aleshores les variables dels components de la part consistent es poden avaluar.

Com que les variables geomètriques representen coordenades d'elements geomètrics, només es poden avaluar respecte d'un sistema de referència. Caldrà, doncs, seleccionar un conjunt **CD**, C, com a sistema de referència respecte del qual analitzar el graf bipartit associat al problema.

Per la definició de conjunt **CD**, els punts que pertanyen a C són fixos respecte del sistema de referència associat a C. Tanmateix, els punts pertanyents al conjunt **CD**, C, no són els únics elements geomètrics amb les posicions fixes respecte del sistema de referència de C. També queden fixades les rectes suport dels segments tals que els seus dos extrems pertanyen a C, Figura 6.2a, i les rectes suport del segments que defineixen els llocs geomètrics RA, Figura 6.2b,

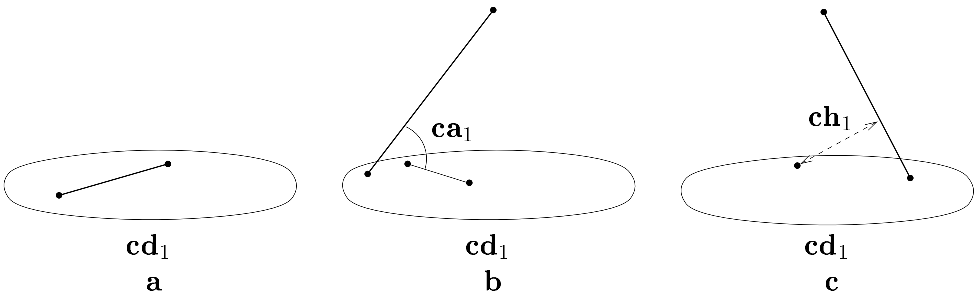


Figura 6.2: Rectes fixades respecte d'un conjunt **CD**.

i RT, Figura 6.2c. La descripció dels llocs geomètrics RA i RT es troba a la Secció 4.3.2 del Capítol 4. Notarem per $\mathcal{F}(C)$ al conjunt d'elements geomètrics fixats per un conjunt **CD**, C.

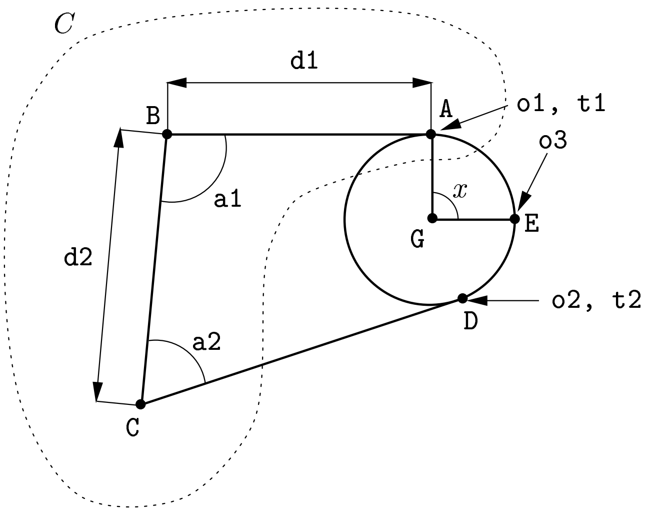
Per tal d'analitzar el graf bipartit B, que representa l'estat de l'anàlisi equacional, repecte del sistema de referència del conjunt **CD**, C, cal eliminar del graf bipartit les variables geomètriques associades als elements geomètrics de $\mathcal{F}(C)$. A aquest procés l'anomenem *restricció del graf bipartit B pel conjunt **CD**, C*.

Definició 6.2. Siguin e_x i e_y les variables geomètriques corresponents a l'element geomètric e. El *graf bipartit restringit* de $B = (F, X, E)$ pel conjunt **CD**, C, que notarem per $\mathcal{R}(B, C)$, és el subgraf bipartit induït pel conjunt de vèrtexs $X - \{e_x, e_y \mid e \in \mathcal{F}(C)\}$.

Noteu que el conjunt d'equacions en $\mathcal{R}(B, C)$, $F = F_e \cup F_s$, coincideix amb el conjunt d'equacions de B. La restricció d'un graf bipartit elimina únicament variables geomètriques. Com que les equacions d'F_e no contenen variables geomètriques, no resulten afectades. Per altra banda, tota equació generada per una restricció simbòlica, és a dir, en F_s, a més de les variables geomètriques conté una variable dimensional i, per tant, malgrat que s'eliminin totes les variables geomètriques d'una restricció geomètrica simbòlica sempre restarà la variable dimensional.

Exemple 6.1. El problema geomètric definit en base a restriccions de la Figura 6.3 conté un cercle amb el centre i el radi desconeguts, una restricció simbòlica d'angle, x en la Figura 6.3a, i una equació, Figura 6.3b. Les restriccions de tangència i de coincidència sobre el cercle es transformen en restriccions simbòliques de distància entre punts i distància entre un punt i una recta. El graf bipartit de la Figura 6.4a representa l'estat inicial de l'anàlisi equacional. L'estat de l'anàlisi geomètrica està constituït per un únic conjunt **CD**, C, que es representa gràficament en la Figura 6.3a. La Figura 6.4b mostra la restricció del graf bipartit inicial pel conjunt **CD**, C. Noteu que les rectes AB i CD s'han eliminat del graf bipartit perquè pertanyen a $\mathcal{F}(C)$. $\Diamond$

Informalment, la nova regla, que anomenarem regla K, es pot descriure com segueix. Si la part consistent, $B_1, \ldots, B_n$ de la DM-descomposició de $\mathcal{R}(B, C)$ és estructuralment resoluble, aleshores



a

$$v = 3 \sin x + 2$$

b

Figura 6.3: Problema amb restriccions simbòliques i equacions.

1. $B_1, \dots, B_n$ s'han d'eliminar del graf bipartit B.
2. Si s'ha avaluat alguna variable dimensional, d, aleshores passen a ser valuades totes aquelles restriccions geomètriques simbòliques de B_∞ que tinguin d com a variable dimensional. Per una banda, aquestes restriccions geomètriques simbòliques s'han d'eliminar de B_∞ i, per l'altra, s'han d'afegir els conjunts de restriccions elementals corresponents a aquestes restriccions a l'estat de l'anàlisi geomètrica.
3. Si s'ha avaluat algun parell de variables geomètriques (e_x, e_y) corresponents a l'element geomètric e, aleshores e ha estat posicionat respecte del sistema de referència del conjunt **CD**, C. Per tant, e s'ha d'incorporar a C.

La regla d'anàlisi equacional es descriu més formalment a la Secció D.2.2 de l'Apèndix D i s'expressa com a regla de reducció al Capítol 7.

6.5 La fase de generació

La fase de generació produeix una seqüència d'operacions geomètriques a partir de les regles d'anàlisi. A continuació s'estudiarà la subseqüència corresponent a la regla d'anàlisi equacional K. L'aplicació de la regla K comporta la resolució d'un sistema d'equacions que es correspon amb els components de la part consistent de la DM-descomposició del graf bipartit que representa l'estat de l'anàlisi equacional restringit per un conjunt **CD**. Així doncs, caldrà enregistrar a la seqüència d'operacions geomètriques les equacions i les variables que cal resoldre. Suposarem que es disposa de l'operació `resoldre`, veieu l'Apèndix C, a

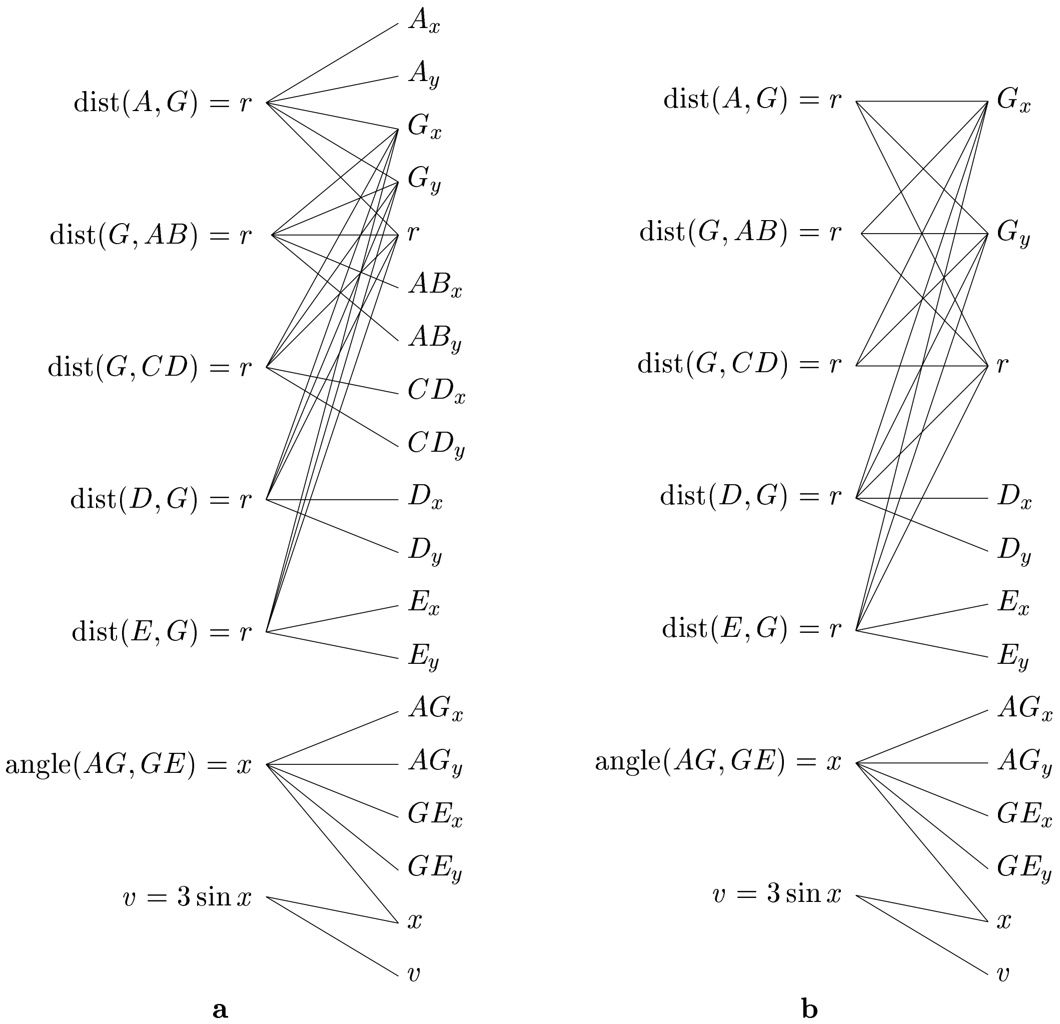


Figura 6.4: (a) Estat inicial de l'anàlisi equacional. (b) Restricció de (a) pel conjunt **CD**, C.

la qual se subministra el conjunt d'equacions i el conjunt de variables a resoldre. En la Secció D.2.3 de l'Apèndix D es descriu més detalladament la subseqüència d'operacions corresponent a la regla K.

6.6 La fase de construcció

A la fase de construcció s'avalua la seqüència d'operacions geomètriques produint com a resultat les posicions relatives dels elements geomètrics del problema geomètric definit en base a restriccions. Per tal d'avaluar l'operació `resoldre`, cal augmentar aquesta fase amb un mètode de resolució de sistemes d'equacions no lineals, ja sigui numèric o simbòlic.

6.7 Àmbit del mètode

La inclusió de variables geomètriques en el mètode híbrid permet la resolució de problemes on intervenen elements geomètrics amb més de dos graus de llibertat sense haver d'incorporar al mètode constructiu nous tipus d'elements geomètrics, de restriccions ni de regles. A tall d'exemple es consideraran els cercles amb el centre i el radi desconeguts que són elements geomètrics amb tres graus de llibertat. Entenem per un cercle amb el centre desconegut aquell en el qual el centre no intervé en cap restricció geomètrica valuada.

Les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles es transformen durant la fase de traducció en restriccions de distància entre el centre del cercle i un punt o una recta, segons es descriu en [62]. Aquestes restriccions són restriccions geomètriques simbòliques quan el radi del cercle és desconegut.

Com que les restriccions geomètriques simbòliques no es resolen pel mètode constructiu, el centre i el radi del cercle s'han de calcular simultàniament en una aplicació de la regla K. Seguidament es discuteixen les condicions que es requereixen per tal de resoldre cercles amb el centre i el radi desconeguts.

Lema 6.1. *Sigui g el centre d'un cercle i sigui r el seu radi. Sigui $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ el conjunt d'elements geomètrics tals que intervenen en alguna restricció simbòlica que te r com a variable dimensional i g com a l'altre element geomètric. Es pot calcular la posició relativa de g respecte d'un conjunt* ***CD**, C si $|\mathcal{F}(C) \cap E| = 3$.*

Demostració. Suposem que es compleixen les condicions del Lema 6.1, és a dir, $|\mathcal{F}(C) \cap E| = 3$. La Figura 6.5 mostra gràficament aquesta situació. En aquest estat es pot aplicar la regla d'anàlisi d'equacions K. La Figura 6.6 mostra la DM-descomposició aplicada a la restricció segons el conjunt **CD**, C, del graf bipartit que representa l'estat de l'anàlisi d'equacions. Observeu en la Figura 6.6 que el subsistema format per les restriccions simbòliques amb elements en el conjunt **CD**, C, ha estat resolt. Per tant, després de l'aplicació de la regla K

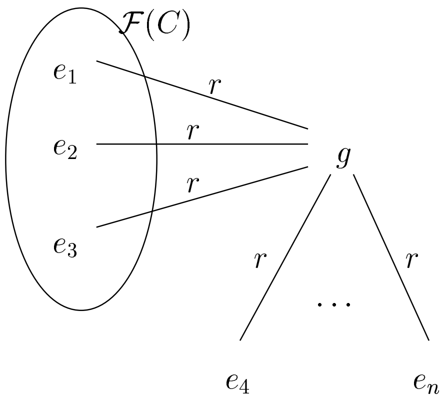


Figura 6.5: Estat inicial de l'anàlisi geomètrica.

l'element geomètric g ha estat incorporat al conjunt **CD**, C, obtenint el conjunt **CD**, C', veieu la Figura 6.7. El que és el mateix, s'ha determinat la posició relativa de g en C a més de calcular el valor de r. □

La Figura 6.8 mostra un problema no resoluble pel mètode híbrid. En la Figura 6.9, que mostra l'estat final de l'anàlisi geomètrica, es pot veure que no es compleix la condició del Lema 6.1. En aquest cas $E = \{A, l, n, D\}$, C pot ser o bé C_1 o bé C_2 i, en ambdós casos $|\mathcal{F}(C) \cap E| = 2$. Ni la restricció pel conjunt **CD**, C_1, ni per C_2 permet calcular la posició de g ni el radi r. Clarament, aquest exemple és generalitzable a una família de casos no resolubles. Pertany a aquestat família tot problema que la seva resolució condueixi a un estat que contingui únicament dos conjunts de restriccions tals que comparteixen un punt i que dos dels elements geomètrics de cada un dels conjunts intervé en una restricció geomètrica simbòlica amb el centre del cercle. A partir d'aquesta configuració bàsica se'n poden construir de més elaborades, per exemple, afegint dos nous conjunts de restriccions tals que comparteixen un punt i que un conté el centre del cercle i l'altre conté un element d'un dels conjunts de restriccions de la configuració bàsica.

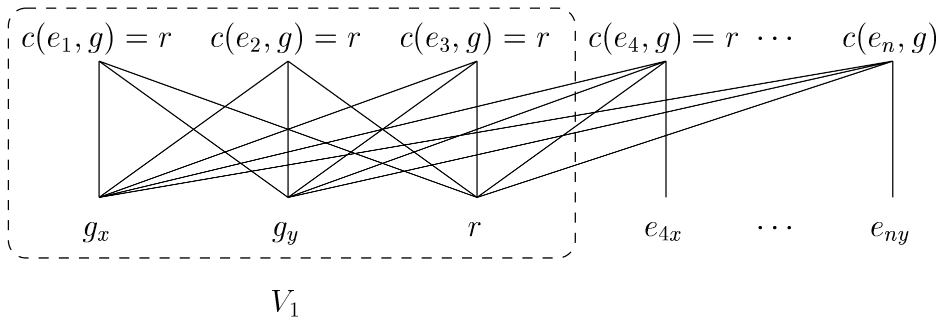


Figura 6.6: DM-descomposició del graf bipartit restringit per C.

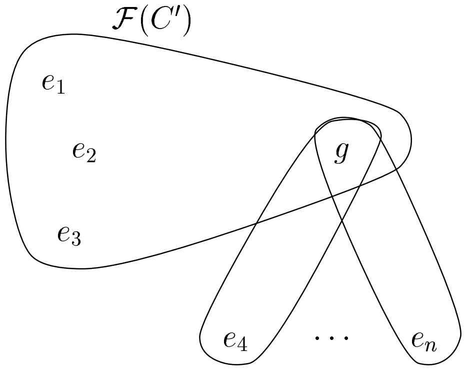


Figura 6.7: Estat de l'anàlisi geomètrica un cop aplicada la regla K.

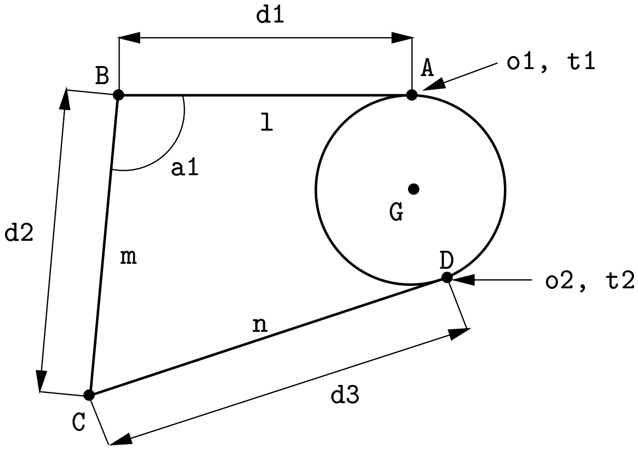


Figura 6.8: Problema no resoluble pel mètode híbrid.

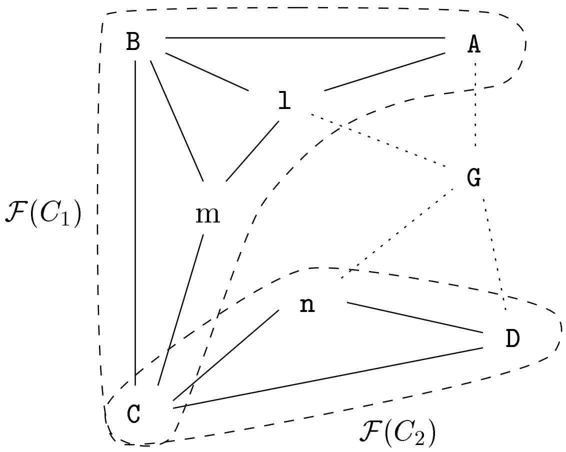


Figura 6.9: Estat final de l'anàlisi geomètrica del problema de la Figura 6.8.

Capítol 7

Correctesa del Mètode Híbrid

En aquest capítol demostrem que el mètode híbrid sempre acaba i que l'ordre en què s'apliquen les regles és irrellevant. Dit d'una altra manera, si existeix una seqüència d'aplicació de regles que resol un problema geomètric definit en base a restriccions, aleshores el mètode híbrid la troba.

L'estructura d'aquest capítol és similar a la del Capítol 5. En primer lloc, formalitzem el mètode híbrid com un sistema de reducció abstracte i, en segon lloc, demostrem l'acabament i la confluència de la fase d'anàlisi que és el que entenem per correctesa del mètode. En aquest capítol es refina la demostració de la correctesa del mètode híbrid publicada en [42]. La terminologia, la notació i les tècniques emprades en la demostració són consistents amb les del Capítol 5.

7.1 El mètode híbrid com a sistema de reducció

L'estat del mètode híbrid es pot representar per una terna (D, X, B) on D és la família de conjunts **CD**, X és la unió de les famílies de conjunts **CA** i **CH**, i B és el graf bipartit associat a les restriccions geomètriques simbòliques i a les equacions. El mètode híbrid incorpora la regla K al conjunt de regles d'anàlisi del mètode constructiu. Anomenarem $\longrightarrow_{\rho'}$ a la regla del mètode constructiu. La regla $\longrightarrow_{\rho'}$ s'expressa en termes de la regla $\longrightarrow_{\rho}$ com mostra la Figura 7.1. Anomenarem $\longrightarrow_{\kappa}$ a la regla d'anàlisi equacional K expressada com a regla de reducció, veieu la Figura 7.1. A continuació definim el sistema de reducció abstracte objecte del nostre estudi.

Definició 7.1. El sistema de reducció abstracte $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_{\kappa} \rangle$ està constituït pel conjunt d'elements S i per la regla de reducció unió de les regles $\longrightarrow_{\rho'}$ i $\longrightarrow_{\kappa}$. Els elements del conjunt S són ternes de la forma (D, X, B) on D és la família de conjunts **CD**, X és la unió de les famílies de conjunts **CA** i **CH**, i B és el graf bipartit associat a les restriccions geomètriques simbòliques i a les equacions.

$$
\begin{array}{lll}
(D,X,B) & \longrightarrow_{\rho'} & (D',X',B) \\
& & \text{si } \{(D,X) \longrightarrow_{\rho} (D',X') \\
(D,X,B) & \longrightarrow_{\kappa} & ((D - \{d\}) \cup \{d'\} \cup V_d, X \cup V_a \cup V_h, B') \\
& & \text{si } \begin{cases}
d \in D \wedge \\
\mathcal{D}(\mathcal{R}(B,d)) = (\{B_0, B_1, \dots, B_r, B_\infty\}, \prec) \wedge \\
B_0 = (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \wedge \\
B_c = B_1 \cup \dots \cup B_r \wedge \\
d' = d \cup \{e \mid e_x, e_y \in X_g(B_c)\} \wedge \\
V_d = \{\{a,b\} \mid (\mathrm{dist}(a,b) = x) \in F_D\} \wedge \\
V_a = \{\{a,b\} \mid (\mathrm{angle}(a,b) = x) \in F_A\} \wedge \\
V_h = \{\{a,b\} \mid (\mathrm{dist}(a,b) = x) \in F_H\} \wedge \\
F_D = \{(\mathrm{dist}(a,b) = x) \in F_s(B_\infty) \mid x \in X_d(B_c)\} \wedge \\
F_A = \{(\mathrm{angle}(a,b) = x) \in F_s(B_\infty) \mid x \in X_d(B_c)\} \wedge \\
F_H = \{(\mathrm{dist}(a,b) = x) \in F_s(B_\infty) \mid x \in X_d(B_c)\} \wedge \\
B' = \mathrm{Ind}(B_\infty, F_s(B_\infty) - (F_D \cup F_A \cup F_H))
\end{cases}
\end{array}
$$

Figura 7.1: Regles del sistema de reducció $\mathcal{S}$

7.2 Correctesa de la fase d'anàlisi

Un cop expressat el mètode híbrid com el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}$ ens disposem a demostrar-ne algunes propietats. En primer lloc, demostrarem que $\mathcal{S}$ és d'acabament finit o noetherià. Aquesta propietat, a més de ser important per si mateixa, serà emprada en la demostració de la confluència de $\mathcal{S}$. La confluència i l'acabament impliquen la propietat de forma normal única que ens permet garantir que l'ordre d'aplicació de les regles és irrellevant.

7.2.1 Acabament

La propietat d'acabament finit del sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}$ es pot enunciar com segueix.

Lema 7.1. *El sistema de reducció abstracte $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_{\kappa} \rangle$ és noetherià.*

Demostració. Sigui $(D,X,B) \in S$ un element qualsevol. Sigui $B = (F_e \cup F_s, X_e \cup X_d \cup X_g, E)$ un graf bipartit on el primer conjunt de vèrtexs està format per la unió del conjunt d'equacions, F_e, i del conjunt de restriccions geomètriques simbòliques, F_s, i el segon conjunt de vèrtexs està constituït per la unió del conjunt de variables externes, X_e, del conjunt de variables dimensionals, X_d, i del conjunt de variables geomètriques, X_g. La regla $\longrightarrow_{\kappa}$ pot avaluar restriccions geomètriques simbòliques, per tant el nombre de conjunts de restriccions que pot arribar a reduir la regla $\longrightarrow_{\rho'}$ és $|D| + |X| + |F_s|$. Si tenim en compte que la regla $\longrightarrow_\kappa$ sempre avalua una variable externa o una variable dimensional i que la regla $\longrightarrow_{\rho'}$ sempre redueix en dos el nombre de conjunts de restriccions, aleshores el nombre de reduccions de $\longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa$ està fitat per $\lceil(|D| + |X| + |F_s|)/2\rceil + |X_e| + |X_d|$. $\square$

7.2.2 Element inicial

Intuïtivament, un problema geomètric definit en base a restriccions pot ser sobre-restringit per alguna de les tres vies següents. En primer lloc, prescindint de les restriccions geomètriques simbòliques i de les equacions, l'element inicial corresponent a les restriccions geomètriques valuades pot ser estructuralment sobre-restringit. En segon lloc, prescindint de les restriccions geomètriques valuades, el sistema d'equacions constituït per les restriccions geomètriques simbòliques i les equacions pot ser sobredeterminat. En tercer lloc, la interacció de les restriccions geomètriques valuades, les restriccions geomètriques simbòliques i les equacions introdueixen restriccions geomètriques valuades addicionals de manera que en algun moment es pot obtenir un problema, parcialment resolt, estructuralment sobre-restringit. A continuació adaptarem la definició d'element inicial estructuralment sobre-restringit del Capítol 5 al context del sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}$ per tal de contemplar el primer i tercer dels casos anteriors. El segon cas és fàcil de contemplar tenint en compte que la regla $\longrightarrow_\kappa$ realitza l'anàlisi estructural del graf bipartit associat al sistema d'equacions.

Podem definir el concepte d'element inicial pel sistema de reducció abstracte $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa\rangle$ d'una manera anàloga a la de la Definició 5.2 si considerem únicament els components D i X dels element $(D, X, B) \in S$.

Definició 7.2. Anomenarem *element inicial* de $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa\rangle$ a tot element $C_0 = (D_0, X_0, B_0) \in S$ tal que tot conjunt $d \in D_0$ és un conjunt **CD** elemental.

D'aquesta manera, els resultats relacionats amb el concepte d'element inicial obtinguts al Capítol 5 es poden adaptar al cas del sistema de reducció $\mathcal{S}$. En particular, d'ara en endavant farem ús de la definició d'element inicial estructuralment sobre-restringit, veieu la Definició 5.5.

Cal destacar diferents característiques d'aquesta definició. En primer lloc, el concepte d'element inicial té en compte únicament les restriccions geomètriques valuades, incloent també les restriccions geomètriques simbòliques que en algun moment passaran a ser valuades. En segon lloc, en qualsevol moment de la fase d'anàlisi es pot estudiar l'element inicial generador d'un element $(D, X, B) \in S$ per tal de decidir si és estructuralment sobre-restringit en el sentit geomètric. Finalment, excloent de S els elements inicials estructuralment sobre-restringits en el sentit geomètric, es garanteix que la primera i la tercera vies en que un problema pot ser estructuralment sobre-restringit no es donaran mai.

7.2.3 Confluència

Per tal de demostrar la confluència del sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}$ seguirem la mateixa estratègia que en el Capítol 5. Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}' = \langle S, \longrightarrow_{\rho'}, \longrightarrow_{\kappa} \rangle$, demostrarem que tot parell de regles en $\mathcal{S}'$ commuta. Aquest fet ens permetrà aplicar el Teorema B.2 per tal de demostrar la confluència de $\mathcal{S}$.

Lema 7.2. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}' = \langle S, \longrightarrow_{\rho'}, \longrightarrow_{\kappa} \rangle$. Si cap element inicial de S és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla ρ' commuta amb ella mateixa.*

Demostració. És una conseqüència immediata de la definició de la regla $\longrightarrow_{\rho'}$ i del Lema 5.1 del Capítol 5. □

Lema 7.3. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}' = \langle S, \longrightarrow_{\rho'}, \longrightarrow_{\kappa} \rangle$. Si cap element inicial de S és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla ρ' commuta amb la regla κ.*

Demostració. En primer lloc, es demostrarà que les regles $\longrightarrow_{\rho'}$ i $\longrightarrow_{\kappa}$ commuten feblement. Siguin $T_i = (D_i, X_i, B_i) \in S$, $1 \leq i \leq 4$, tals que $T_2 \longleftarrow_{\rho'} T_1 \longrightarrow_{\kappa} T_3$.

Siguin $d_1, d_2, d_3 \in D_1 \cup X_1$ els conjunts de restriccions implicats en l'aplicació de la regla $T_1 \longrightarrow_{\rho'} T_2$ de manera que $D_2 = (D_1 - \{d_1, d_2, d_3\}) \cup \{d_1 \cup d_2 \cup d_3\}$ i $X_2 = X_1 - \{d_1, d_2, d_3\}$. El graf bipartit B_2 coincideix amb B_1 perquè les regles constructives no afecten l'anàlisi equacional, veieu la Figura 7.1.

Sigui $C_1 \in D_1$ el conjunt **CD** respecte del qual es restringeix el graf bipartit B_1 en l'aplicació de la regla $T_1 \longrightarrow_{\kappa} T_3$. La regla $\longrightarrow_{\kappa}$ avalua variables dimensionals i possiblement incorpora algun element geomètric al conjunt C_1. Siguin $c_1, c_2, \ldots, c_n$ els conjunts **CD** corresponents a les restriccions geomètriques simbòliques que ha avaluat la regla. Siguin $x_1, x_2, \ldots, x_m$ els conjunts **CA** i **CH** corresponents a les restriccions geomètriques simbòliques que ha avaluat la regla. Sigui $C_1' \supseteq C_1$ el conjunt que conté els elements de C_1 més els elements geomètrics corresponents a les variables geomètriques calculades per la regla $\longrightarrow_{\kappa}$. L'estat T_3 és, doncs, $D_3 = (D_1 - \{C_1\}) \cup \{C_1', c_1, \ldots, c_n\}$, $X_3 = X_1 \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$ i B_3 és un subgraf bipartit de B_1 del qual s'han eliminat les equacions i les restriccions simbòliques resoltes.

Considerem, en primer lloc, el cas en què el conjunt C_1 no coincideix amb cap dels conjunts de restriccions d_1, d_2, d_3 implicats en la regla $T_1 \longrightarrow_{\rho'} T_2$. La regla $\longrightarrow_{\kappa}$ és aplicable a l'estat T_2 perquè $C_1 \in D_2$ i $B_2 = B_1$. Per altra banda, la regla $\longrightarrow_{\rho'}$ és aplicable a l'estat T_3 perquè $d_1, d_2, d_3 \in D_3 \cup X_3$, ja que la regla $\longrightarrow_{\kappa}$ només ha eliminat de D_1 l'element C_1 que no intervé en la regla $\longrightarrow_{\rho'}$. Clarament, en aquest cas les regles commuten.

En segon lloc, considerem el cas en què el conjunt C_1 coincideix amb un dels conjunts d_1, d_2 o d_3, veieu la Figura 7.2. Suposem que $C_1 = d_1$. La regla $T_1 \longrightarrow_{\rho'} T_2$ fusiona d_1, d_2 i d_3 en un únic conjunt, d_4. La regla $T_2 \longrightarrow_{\kappa} T_4$

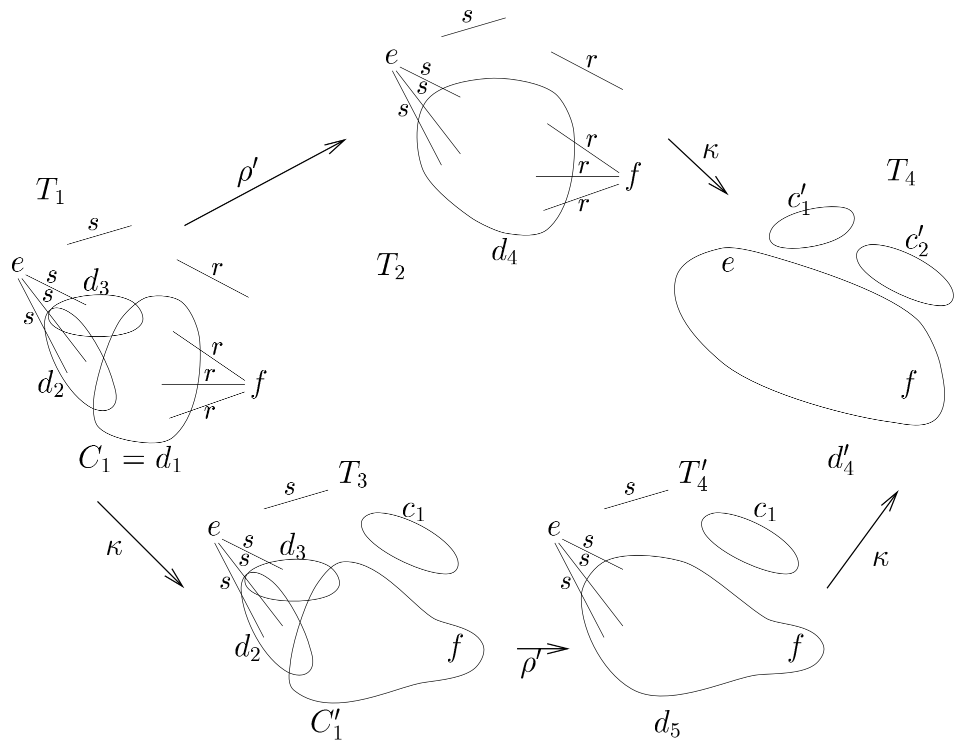


Figura 7.2: $\longrightarrow_{\rho'}$ i $\longrightarrow_{\kappa}$ commuten en el cas que comparteixin un conjunt **CD**.

és aplicable, no pas restringint el graf bipartit B_2 per C_1 que ha estat fusionat amb d_2 i d_3, però sí restringint B_2 per d_4 que conté tots els elements de C_1. Siguin $c'_1, c'_2, \ldots, c'_k$ els conjunts **CD** corresponents a les restriccions geomètriques simbòliques que ha avaluat la regla $T_2 \longrightarrow_{\kappa} T_4$. Siguin $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$ els conjunts **CA** i **CH** corresponents a les restriccions geomètriques simbòliques que ha avaluat la regla $T_2 \longrightarrow_{\kappa} T_4$. Sigui $d'_4 \supseteq d_4$ el conjunt que conté els elements de d_4 més els elements geomètrics corresponents a les variables geomètriques calculades per la regla $T_2 \longrightarrow_{\kappa} T_4$. L'estat T_4 és, doncs, $D_4 = (D_2 - d_4) \cup \{d'_4, c'_1, \ldots, c'_k\}$, $X_4 = X_2 \cup \{x'_1, \ldots, x'_l\}$ i B_4 és un subgraf bipartit de B_2 del qual s'han eliminat les equacions i les restriccions geomètriques simbòliques resoltes. Observeu que l'anàlisi del graf bipartit B_2 restringit per d_4 pot haver resolt més equacions i restriccions simbòliques que l'anàlisi de B_1 restringit per C_1.

Per una altra banda, $T_1 \longrightarrow_{\kappa} T_3$. Els conjunts $c_1, \ldots, c_n \in D_3$ i $x_1, \ldots, x_m \in X_3$ són subconjunts de $c'_1, \ldots, c'_k \in D_4$ i de $x'_1, \ldots, x'_l \in X_4$ respectivament perquè han estat obtinguts aplicant la regla d'anàlisi equacional al mateix graf bipartit, però restringit per C_1 que és un subconjunt de d_4. Per la mateixa raó, els elements geomètrics incorporats a C_1 que han donat lloc a C'_1 són un subconjunt dels incorporats a d_4 per produir d'_4. Siguin $e_1, \ldots, e_j$ aquests elements geomètrics. Sigui $T'_4 = (D'_4, X'_4, B'_4)$. L'aplicació de la regla $T_3 \longrightarrow_{\rho'} T'_4$ permet fusionar C'_1, d_2 i d_3 en d_5 que difereix únicament de d'_4 en els elements geomètrics $e_1, \ldots, e_j$. Els conjunts D_4 i X_4 difereixen de D'_4 i X'_4 en les restriccions simbòliques valuades per la restricció de B_1 per d_4 en comptes de C_1. El graf bipartit B_4 és un subgraf bipartit de B'_4 del qual s'han eliminat precisament les restriccions simbòliques en què difereixen $D_4 \cup X_4$ i $D'_4 \cup X'_4$. L'aplicació de la regla $T'_4 \longrightarrow_\kappa T_4$ restringint el graf bipartit B'_4 per d_5 permet avaluar les restriccions simbòliques i calcular les variables geomètriques en què difereixen T_4 i T'_4. Per tant, les regles $\longrightarrow_{\rho'}$ i $\longrightarrow_\kappa$ també commuten en aquest cas.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_{\rho'}$ i $\longrightarrow_\kappa$ commuten, per ser noetherianes i commutar feblement. □

Lema 7.4. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}' = \langle S, \longrightarrow_{\rho'}, \longrightarrow_\kappa \rangle$. Si cap element inicial de S és estructuralment sobre-restringit, aleshores la regla κ commuta amb ella mateixa.*

Demostració. En primer lloc, es demostrarà que la regla $\longrightarrow_\kappa$ és feblement confluent. Siguin $T_i = (D_i, X_i, B_i) \in S$, $1 \leq i \leq 3$, tals que $T_2 \longleftarrow_{\kappa_1} T_1 \longrightarrow_{\kappa_2} T_3$. Per tal que la regla $\longrightarrow_\kappa$ es pugui aplicar de dues maneres diferents cal que existeixin dos conjunts **CD**, $C_1, C_2 \in D_1$, tals que la restricció del bigraf B_1 per cada un d'ells, $\mathcal{R}(B_1, C_1)$ i $\mathcal{R}(B_1, C_2)$, produeixi dos subconjunts d'equacions resolubles, F_1 i F_2 respectivament.

Suposem, en primer lloc, que els conjunt de variables que ocorren en F_1 i F_2 són disjunts. En aquest cas es pot afirmar que existeixen dos conjunts d'equacions independents resolubles cada un dels quals es correspon amb una de les possibles restriccions de B_1. Clarament, les reduccions commuten.

Suposem, d'ara en endavant, que no hi ha en el graf bipartit B_1 cap equació que contingui únicament variables externes. Aquesta mena d'equacions són resolubles independentment del conjunt **CD** pel qual s'efectuï la restricció del graf bipartit B_1. A continuació analitzem els casos en què els dos conjunts d'equacions comparteixen variables dimensionals, variables geomètriques o variables externes.

Comencem per analitzar el cas en què F_1 i F_2 comparteixen una variable dimensional, d. Això implica, que un cop aplicades les regles, $\longrightarrow_{\kappa_1}$ i $\longrightarrow_{\kappa_2}$, els conjunts **CD**, C_1 i C_2, contenen els elements geomètrics implicats en la restricció geomètrica simbòlica que té d com a variable dimensional. És a dir, es complirà alguna de les condicions del Lema 5.3 la qual cosa implica que existeix un element inicial en S estructuralment sobre-restringit contradient les hipòtesis del present lema.

Continuarem analitzant el cas en què F_1 i F_2 comparteixen les variables geomètriques corresponents a l'element geomètric e. L'aplicació de la regla $\longrightarrow_{\kappa_1}$ farà que D_2 contingui el conjunt $\{e\} \cup C_1$ mentre que l'aplicació de $\longrightarrow_{\kappa_2}$ farà que D_3 contingui el conjunt $\{e\} \cup C_2$. Clarament, el graf bipartit B_2 conté les mateixes equacions que han permès calcular e a partir de $\mathcal{R}(B_1, C_2)$. Succeeix el mateix pel cas de graf bipartit B_3 si s'aplica la restricció per C_1, $\mathcal{R}(B_3, C_1)$. Per tant, les dues regles commuten.

Si els conjunts d'equacions F_1 i F_2 comparteixen les variables geomètriques corresponents a més d'un element geomètric, en algun moment s'obtindran dos conjunts de restriccions que compliran alguna de les condicions del Lema 5.3 entrant en contradicció amb les hipòtesis del present lema.

Finalment, suposem que F_1 i F_2 comparteixen una variable externa, e. Com que hem considerat que no hi ha cap equació que contingui únicament variables externes, la variable e ha d'aparèixer, tant en F_1 com en F_2, en una equació on també aparegui una variable dimensional. Per tant, en algun moment posterior de l'anàlisi equacional succeirà que una mateixa variable dimensional serà compartida per més d'un subsistema d'equacions la qual cosa condueix a una contradicció, com s'ha demostrat prèviament.

Pel Teorema B.1(1), $\longrightarrow_\kappa$ és confluent, per ser $\longrightarrow_\kappa$ noetheriana i feblement confluent. $\square$

Finalment, es demostra la confluència de $\mathcal{S}$.

Teorema 7.1. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa \rangle$. Si cap element inicial de S és estructuralment sobre-restringit, aleshores $\mathcal{S}$ és confluent.*

Demostració. Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}' = \langle S, \longrightarrow_{\rho'}, \longrightarrow_\kappa \rangle$. Pels lemes 7.2, 7.3, i 7.4, tot parell de regles commuta. Per tant, aplicant el Teorema B.2 s'obté que $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa \rangle$ és confluent. $\square$

7.2.4 Canonicitat

La canonicitat del sistema de reducció abstracte $\mathcal{S}$ és una conseqüència directa del Lema 7.1 i del Teorema 7.1.

Corol·lari 7.1. *Sigui el sistema de reducció abstracte $\mathcal{S} = \langle S, \longrightarrow_{\rho'} \cup \longrightarrow_\kappa \rangle$. Si cap element inicial de S és estructuralment sobre-restringit, aleshores $\mathcal{S}$ és canònic.*

Capítol 8

Implementació

En aquest capítol descriurem un prototipus de sistema de satisfacció de restriccions geomètriques que implementa els mètodes constructiu i híbrid de satisfacció de restriccions geomètriques presentats als capítols 4 i 6 respectivament. La implementació d'aquest prototipus, que anomenem SolBCN, té com a principal objectiu comprovar la viabilitat dels mètodes proposats en aquesta tesi. Un requisit imprescindible per assolir aquest objectiu ha estat garantir que la implementació correspongui exactament al mètode. En aquest aspecte, dos factors han estat de gran ajuda. En primer lloc, la divisió en fases dels mètodes i, en segon lloc, les eines que s'han triat per implementar SolBCN.

8.1 Arquitectura de SolBCN

L'estructuració en fases dels mètodes constructiu i híbrid suggereix l'arquitectura del prototipus que es mostra a la Figura 8.1. Cada una de les fases ha estat implementada com un procés independent que rep les dades per l'entrada estàndard i produeix els resultats per la sortida estàndard. A més, SolBCN inclou una interfície d'usuari i un magatzem de problemes geomètrics definits en base a restriccions que anomenem Secció, veieu la Figura 8.1. La funció de la interfície d'usuari és doble. Per una banda, simplifica l'edició de problemes, la resolució i la selecció de la solució desitjada. Per l'altra, agrupa els components del sistema d'una forma transparent a l'usuari i controla el flux físic de les dades. Com es pot observar en la Figura 8.1 el flux físic de les dades difereix del flux lògic de la Figura 4.1.

El propòsit de la implementació de SolBCN ha estat l'experimentació. És per aquesta raó que s'ha adoptat una arquitectura prou flexible en la qual s'ha primat la simplicitat en front de l'eficiència. En particular, la implementació de cada fase com un procés independent amb una interfície ben definida permet de substituir o de recombinar els components com convingui amb facilitat. A més, permet implementar cada fase usant l'eina que millor s'ajusta als requeriments i a la funcionalitat de la fase. Les fases de traducció i generació consisteixen en processos simples de compilació mentre que la fase d'anàlisi requereix càlcul

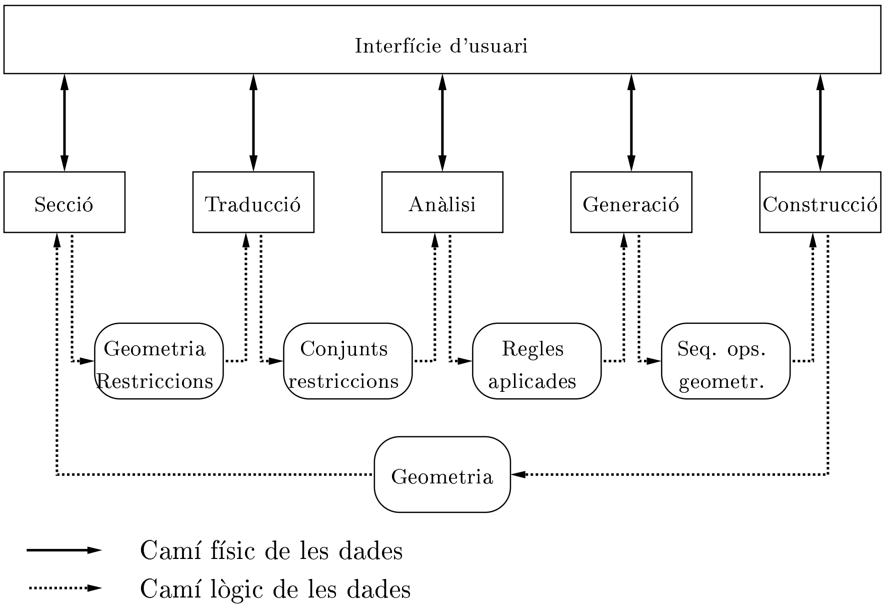


Figura 8.1: Arquitectura de SolBCN.

simbòlic i la de traducció requereix càlcul numèric.

8.2 Components

A continuació es descriuen breument cada un dels components de SolBCN. El component Secció implementa una estructura de dades que permet emmagatzemar un problema geomètric definit en base a restriccions. Per una banda, proporciona operacions orientades a la definició i edició interactiva d'un problema. Per una altra banda, permet emmagatzemar la informació produïda en les diferents fases de la resolució d'un problema. Aquesta informació varia en funció de l'estat de resolució del problema.

La fase de traducció rep la informació de la geometria i de les restriccions d'un problema geomètric definit en base a restriccions i produeix l'estat inicial de la fase d'anàlisi, veieu el Capítol 4. En aquesta fase s'apliquen les regles de traducció. El cost de l'aplicació de les regles de traducció, llevat de la regla M, és lineal en funció del nombre de restriccions. El cost de l'aplicació de la regla M, que calcula la clausura transitiva de les restriccions d'angle, és cúbic en funció del nombre de restriccions d'angle.

La fase d'anàlisi parteix de l'estat inicial constituït per una família de conjunts de restriccions i genera la seqüència de regles aplicades. Actualment està implementada com un mecanisme d'inferència cap endavant encarregat de seleccionar i d'aplicar les regles d'anàlisi.

La fase de generació transforma la seqüència de regles de traducció i d'anàlisi aplicades en la seqüència d'operacions geomètriques que li correspon. L'aplicació de les regles de traducció té un cost lineal en funció de la longitud de la seqüència de regles aplicades.

La fase de construcció rep la seqüència d'operacions geomètriques i produeix una seqüència d'elements geomètrics i de variables escalars amb els valors corresponents. Aquesta fase es pot veure com l'avaluació d'un programa escrit en un llenguatge funcional i, per tant, és aplicable qualsevol tècnica d'avaluació de programes funcionals. Actualment es construeix un graf de dependències entre variables a partir de la seqüències d'operacions geomètriques i s'avaluen les variables seguint una ordenació topològica del graf. El cost d'aquesta fase és lineal en el nombre de variables de la seqüències d'operacions geomètriques.

8.3 Eines

Els processos corresponents a la fase de traducció, la fase d'anàlisi, la fase de generació, la fase de construcció i el magatzem del problema han estat implementats en el llenguatge de programació lògica Prolog, [9, 20]. L'elecció d'un llenguatge de molt alt nivell per implementar SolBCN ha permès obtenir un codi simple i clar la qual cosa ha simplificat la tasca de garantir la correctesa de la implementació.

La interfície d'usuari ha estat implementada en el llenguatge d'extensió Tcl/Tk, [65]. Tcl és un llenguatge senzill tipus *shell* que es pot estendre amb primitives escrites en C. Tk és l'extensió més popular que aporta a Tcl un conjunt d'elements d'interacció gràfica. Conjuntament, Tcl/Tk ofereixen un llenguatge d'alt nivell molt adient per a la construcció d'interfícies d'usuari gràfiques.

8.4 Exemples

Hem seleccionat alguns exemples que il·lustren diferents aspectes com ara el domini del mètode, l'ús de restriccions simbòliques i l'aplicació a la simulació de mecanismes.

Caracteritzar el domini d'un mètode és un treball interessant i difícil alhora. L'únic treball que coneixem que caracteritza parcialment el domini del mètode és el de Verroust, [83]. El treball de Verroust es limita a l'estudi de polígons símples o quasi-simples restringits per restriccions de distància entre punts i d'angle entre segments, però les restriccions han d'estar sempre sobre les arestes de la frontera dels polígons. Les tècniques emprades per Verroust no semblen prou generals per tal de ser aplicades en altres casos. En aquesta tesi ens limitarem a constatar que el mètode constructiu que proposem té diferent domini que altres mètodes constructius, en particular el de Fudos, [25, 26], i el d'Owen, [67].

La Figura 8.2a mostra un problema resoluble pel mètode constructiu proposat al Capítol 4 i que no és resoluble pels mètodes de Fudos i d'Owen. Aquesta

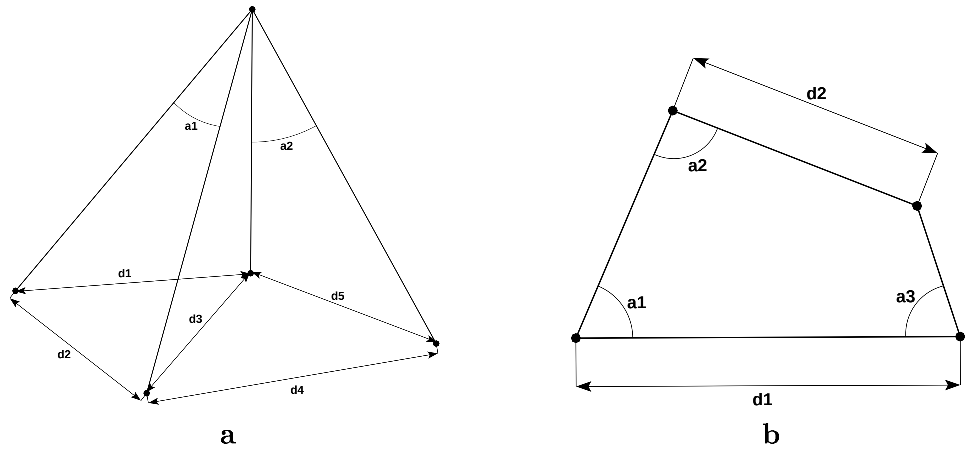


Figura 8.2: Exemples de la diferència en els dominis.

diferència en el domini es deu a que el nostre mètode incorpora regles on s'aplica el teorema de l'arc capaç mentre que el graf de restriccions associat a aquest problema té una configuració que no és resoluble pels altres dos mètodes. Per contra, la Figura 8.2b mostra un problema resoluble pels mètodes de Fudos i d'Owen que no resol el nostre mètode.

Els exemples que proposem a continuació pertanyen a un domini d'aplicació, la simulació de mecanismes, que no és el que ha motivat aquesta tesi. Malgrat tot, la simulació de mecanismes proporciona exemples interessants per experimentar amb els mètodes constructiu i híbrid presentats en aquesta tesi. El disseny de mecanismes requereix que es mantinguin certes relacions que s'expressen d'una manera natural mitjançant equacions.

El primer mecanisme que usem com exemple, Figura 8.3, s'anomena *mecanisme de Peaucellier*, [21], i proporciona un moviment rectilini en el punt `P` del mecanisme. A la Figura 8.4 es pot apreciar una simulació del moviment del mecanisme. Les línies etiquetades `d7` i `d8` han estat afegides per verificar visualment el moviment sobre el segment `d7`. La successió de figures s'ha obtingut variant únicament el valor de l'angle `a1`.

El segon mecanisme, del qual s'en mostra una simulació a la Figura 8.5, s'ha extret de [52]. És el mecanisme d'obertura de les portes d'un ascensor de manera que variant el valor de l'angle `a8` s'obté un moviment sobre una mateixa recta i en sentit contrari dels punts `A` i `B`.

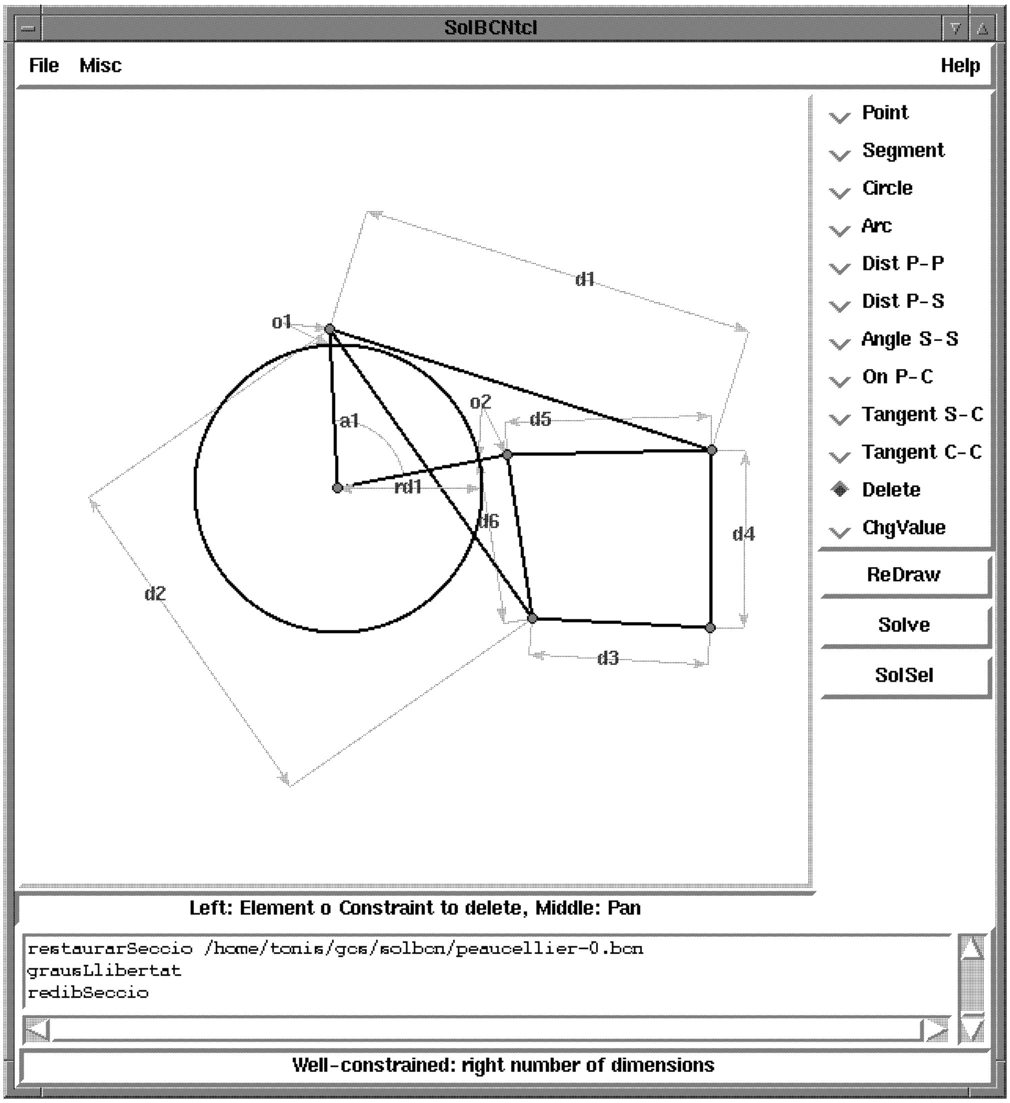
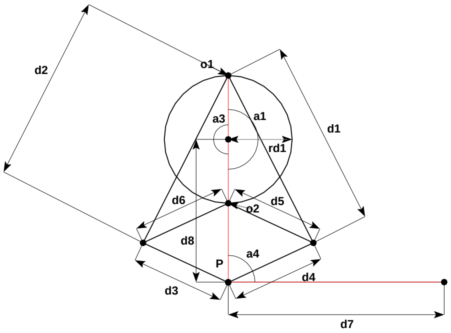
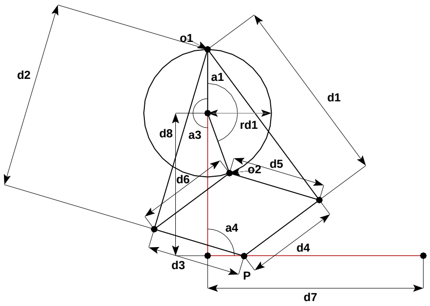


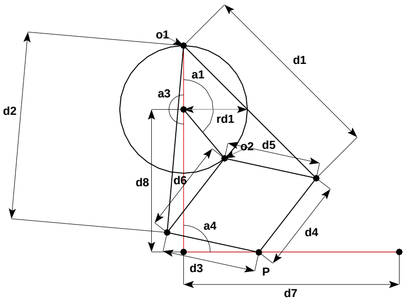
Figura 8.3: Mecanisme de Peaucellier.



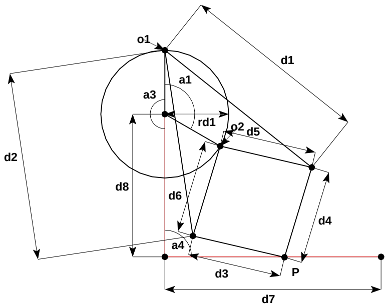
`a1 = 180`



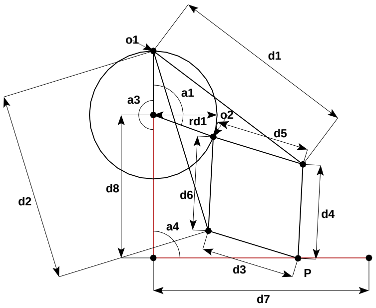
`a1 = 160`



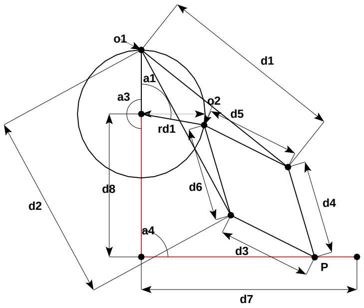
`a1 = 140`



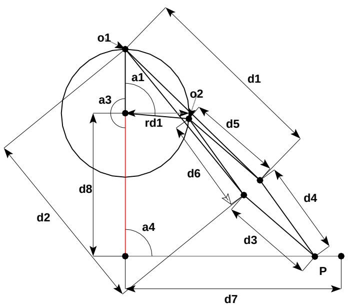
`a1 = 120`



`a1 = 110`



`a1 = 100`



`a1 = 95`

Figura 8.4: Simulació del moviment del mecanisme de Peaucellier.

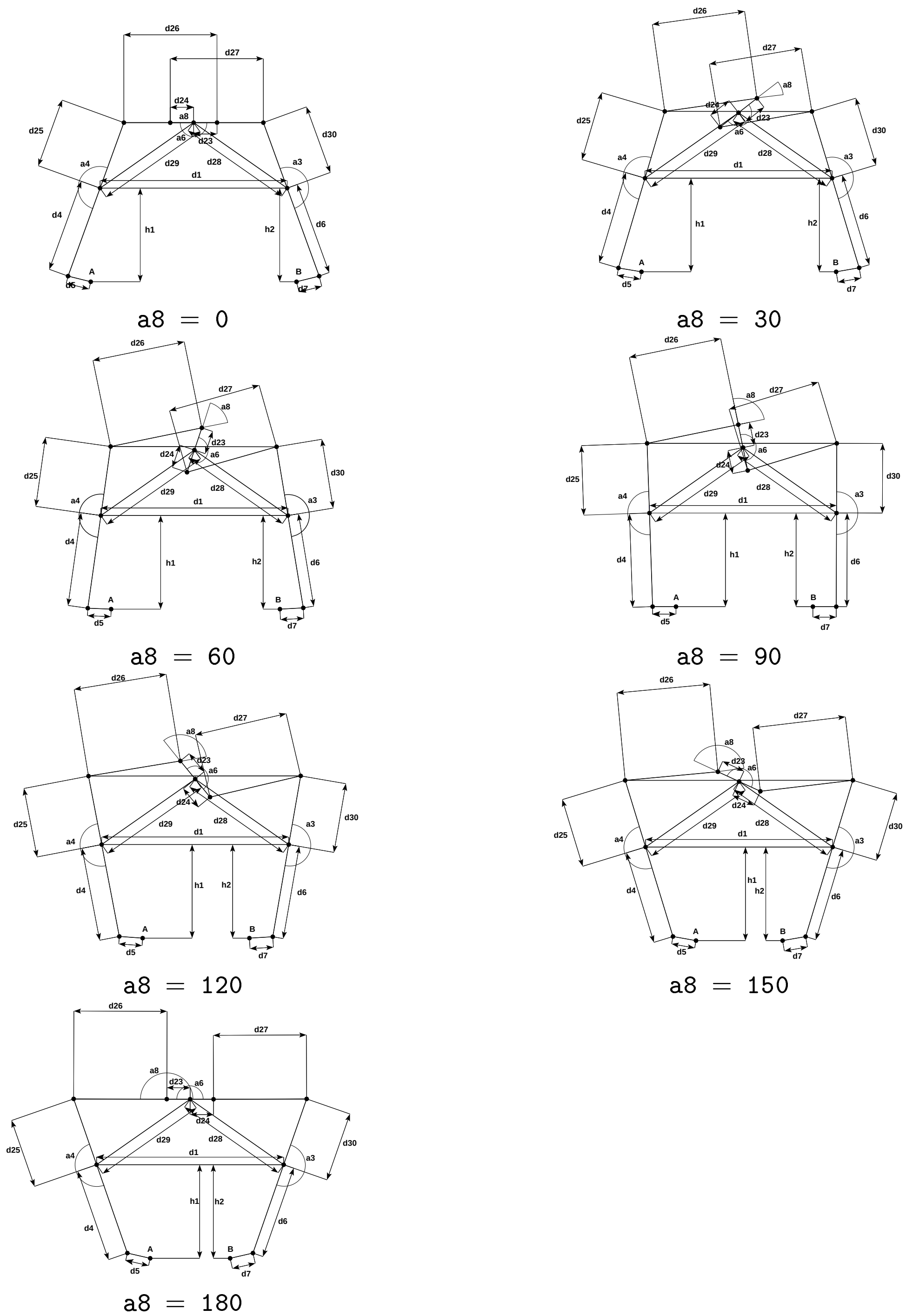


Figura 8.5: Mecanisme d'obertura de les portes d'un ascensor.

Capítol 9

Conclusions i treball futur

En el present capítol es presenten les conclusions a les quals ha conduït aquesta tesi i s'apunten alguns treballs que es podrien desenvolupar en el futur.

9.1 Conclusions

S'ha proposat un mètode constructiu de satisfacció de restriccions geomètriques que es basa en el concepte de construïble amb regle i compàs. Aquest concepte ha estat fonamental a l'hora de derivar sistemàticament un conjunt de regles constructives. El mètode constructiu s'ha formalitzat com un sistema de reducció abstracte del que s'han demostrat les propietats d'acabament i confluència.

Els mètodes constructius s'estructuren de forma natural en fases. Hem tret profit de l'estructuració en fases en els aspectes següents. En primer lloc, la correctesa s'ha establert independentment per cada una de les fases. En segon lloc, es poden trobar algorismes eficients independentment per cada una de les fases. Finalment, ha inspirat l'arquitectura del prototipus de sistema de satisfacció de restriccions geomètriques que s'ha implementat.

S'ha estès el domini de problemes geomètrics definits en base a restriccions. La combinació del mètode constructiu amb tècniques d'anàlisi estructural de sistemes d'equacions ha donat lloc a un mètode híbrid que permet la resolució de problemes amb restriccions geomètriques simbòliques i equacions. De manera anàloga al mètode constructiu, s'ha formalitzat el mètode híbrid com un sistema de reducció abstracte del qual s'han demostrat les propietats d'acabament i confluència. El mètode híbrid resol alguns problemes amb elements geomètrics amb més de dos graus de llibertat. En particular, s'ha demostrat sota quines condicions són resolubles problemes on intervenen cercles amb el radi desconegut.

Finalment, s'ha construït un prototipus de sistema de satisfacció de restriccions geomètriques que implementa els mètodes proposats en aquesta tesi. L'objectiu d'aquest prototipus ha estat doble. Per una banda, demostrar la viabilitat dels mètodes i, per l'altra, experimentar tant amb el domini dels mètodes com amb l'arquitectura d'un sistema de satisfacció de restriccions geomètriques.

9.2 Treball futur

L'estudi del domini dels dos mètodes, el constructiu i l'híbrid, és un treball alhora interessant i complex. Fins al moment desconeixem altres intents de caracteritzar el domini d'un mètode que no siguin els de Verroust *et al.*, [83]. El treball de Verroust en aquest aspecte es restringia als casos específics de polígons simples o quasi-simples amb restriccions de distància entre punts i d'angle entre segments. El fet de trobar com caracteritzar el domini d'un mètode és el primer pas per tal de poder comparar el domini de diferents mètodes.

L'extensió del domini del mètode constructiu és un altre treball futur. Ara per ara, el mètode constructiu no dedueix nova informació geomètrica a partir de conjunts **CA** i **CH**. Caldria estudiar la possibilitat d'incloure noves regles per calcular o fusionar conjunts **CA** i **CH**. Possiblement caldria reinterpretar el significat d'aquests conjunts de restriccions en un sentit més ampli.

El càlcul de la solució desitjada per l'usuari és un problema que requereix un estudi acurat. Els resultats teòrics de Fudos, [25, 26], estableixen que la complexitat del problema de la selecció d'una solució en els reals pertany a la classe NP. Sembla doncs, que una manera d'abordar aquest problema és l'estudi de diferents heurístics que condueixin a seleccionar una solució raonable amb cost polinòmic.

Finalment, l'estudi dels valors possibles d'una de les restriccions suposant que la resta de valors són fixos és un problema pràctic a resoldre. Aquest problema suggereix d'estudiar problemes sota-restringits amb un únic grau de llibertat i la seva relació amb l'anàlisi de mecanismes.

Bibliografia

[1] B. Aldefeld. Variation of geometries based on a geometric-reasoning method. *Computer-Aided Design*, 20(3):117–126, April 1988.

[2] Eugene L. Allgower and Kurt Georg. Continuation and path following. *Acta Numerica*, 2:1–64, 1993.

[3] J.M. Basart. *Grafs: Fonaments i Algorismes.* Number 13 in Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1994.

[4] C. Berge. *Graphs and Hypergraphs.* North-Holland, 1973.

[5] S. Bhansali, G.A. Kramer, and T.J. Hoar. A principled approach towards symbolic geometric constraint satisfaction. *Journal of Artificial Intelligence Research*, (4):419–443, 1996.

[6] A. Borning, R. Anderson, and B. Freeman-Benson. Indigo: A local propagation algorithm for inequality constraints. In *UIST'96*, pages 129–136, Seattle, Washington, USA, November 6-8 1.996. ACM.

[7] A.H. Borning. The programming language aspects of ThingLab, a constrained oriented simulation laboratory. *ACM Trans. on Prog. Lang. and Systems*, 3(4):353–387, October 1981.

[8] W. Bouma, I. Fudos, C. Hoffmann, J. Cai, and R. Paige. Geometric constraint solver. *Computer Aided Design*, 27(6):487–501, June 1995.

[9] I. Bratko. *PROLOG. Programming for Artificial Intelligence. Second Edition.* Addison Wesley, 1990.

[10] B.D. Brüderlin. *Rule-Based Geometric Modelling.* PhD thesis, Institut für Informatik der ETH Zürich, 1988.

[11] B.D. Brüderlin. Symbolic computer geometry for computer aided geometric design. In *Advances in Design and Manufacturing Systems*, Tempe, AZ, Jan. 8-12 1990. Proceedings NSF Conference.

[12] B.D. Brüderlin. Using geometric rewrite rules for solving geometric problems symbolically. In *Theoretical Computer Science 116*, pages 291–303. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.

[13] S.A. Buchanan and A de Penington. Constraint definition system: a computer-algebra based approach to solving geometric-constraint problems. *Computer-Aided Design*, 25(12):741–750, December 1993.

[14] B. Buchberger. *Multidimensional Systems Theory*, chapter Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, pages 184–232. D. Reidel Publishing Theory, 1985.

[15] G. Chartrand and L. Lesniak. *Graphs and Digraphs.* Wadsworth & Books, 1986.

[16] S.-C. Chou. An introduction to Wu's method for mechanical theorem proving in geometry. *Journal of Automated Reasoning*, (4):237–267, 1988.

[17] S.-C. Chou. *Mechanical geometry theorem proving.* D. Reidel, 1988.

[18] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants: Multiple and shortest proof generation. *Journal of Automated Reasoning*, 17:325–347, 1996.

[19] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants: Theorem proving with full angles. *Journal of Automated Reasoning*, 17:349–370, 1996.

[20] W.F. Clocksin and C.S. Mellish. *Programming in Prolog.* Springer-Verlag, Berlin, 3rd. edition, 1987.

[21] H.M. Cundy and A.P. Rollett. *Mathematical Models.* Oxford University Press, 1961. Second edition.

[22] M. Dohmen. A survey of constraint satisfaction techniques for geometric modeling. *Computer & Graphics*, 19(6):831–845, 1995.

[23] B. Freeman-Benson, J. Maloney, and A. Borning. An incremental constraint solver. *Communications of the ACM*, 33(1):54–63, 1990.

[24] I. Fudos. Editable representations for 2D geometric design. Master's thesis, Purdue University, Department of Computer Sciences, 1993.

[25] I. Fudos. *Constraint Solving for Computer Aided Design.* PhD thesis, Purdue University, Department of Computer Sciences, 1995.

[26] I. Fudos and C.M. Hoffmann. Correctness proof of a geometric constraint solver. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 6(4):405–420, 1996.

[27] I. Fudos and C.M. Hoffmann. A graph-constructive approach to solving systems of geometric constraints. *ACM Transactions on Graphics*, 16(2):179–216, April 1997.

[28] D.J.H. Garling. *A course in Galois theory.* Cambridge University Press, 1986.

[29] Y. Hel-Or, A. Rappoport, and M. Werman. Relaxed parametric design with probabilistic constraints. In *ACM Solid Modeling'93*, pages 261–270, Montreal, Canada, 1993.

[30] A. Heydon and G. Nelson. The juno-2 constraint-based drawing editor. Research Report 131a, Digital Systems Research Center, December 1994.

[31] R.C. Hillyard and I.C. Braid. Characterizing non-ideal shapes in terms of dimensions and tolerances. In *ACM Computer Graphics*, pages 234–238, 1978.

[32] C.H. Hoffmann and R. Joan-Arinyo. *Geometric Modeling for Product Realization*, chapter Erep - An Editable, High-Level Representation for Geometric Design and Analysis. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1993.

[33] C.M. Hoffmann and R. Joan-Arinyo. Symbolic constraints in constructive geometric constraint solving. *Journal of Symbolic Computation*, 23:287–300, 1997.

[34] C.M. Hoffmann and P.J. Vermeer. A spatial constraint problem. In J.P. Merlet and B. Ravani, editors, *Computational Kinematics'95*, pages 83–92. Kluwer Academic Publ., 1995.

[35] W. Hower and W.H. Graf. Research in constraint-based layout, visualization, CAD, and related topics: A bibliographical survey. Technical report, August 1996.

[36] C.-Y. Hsu. *Graph-Based Approach for Solving Geometric Constraint Problems*. PhD thesis, Department of Computer Science. The University of Utah, June 1996.

[37] C.-Y. Hsu and B.D. Brüderlin. *CAD Systems Development: Tools and Methods*, chapter A Hybrid Constraint Solver Using Exact and Iterative Geometric Constructions, pages 265–279. Springer-Verlag, 1997.

[38] R. Joan-Arinyo. Triangles, ruler and compass. Technical Report LSI-95-6-R, Department LiSI, Universitat Politècnica de Catalunya, 1995.

[39] R. Joan-Arinyo and A. Soto. A rule-constructive geometric constraint solver. In *UNIF'95 Ninth International Workshop on Unification*, pages 29–32, Sitges (Barcelona), April 2, 3 1995. Extended abstract.

[40] R. Joan-Arinyo and A. Soto-Riera. A correct rule-based geometric constraint solver. *Computers & Graphics*, 21(5):599–609, 1997.

[41] R. Joan-Arinyo and A. Soto-Riera. A ruler-and-compass geometric constraint solver. In *Product Modeling for Computer Integrated Design and Manufacture*, pages 384 – 393. Chapman and Hall, London, 1997.

[42] R. Joan-Arinyo and A. Soto-Riera. Combining constructive and equational geometric constraint solving techniques. *ACM Transactions on Graphics*, 1998. To appear.

[43] L. W. Johnson and R. D. Riess. *Numerical analysis.* Addison-Wesley, 1982. Second edition.

[44] K. Kending. *Elementary algebraic geometry.* Springer, 1977.

[45] N. Kin, Y. Takai, and T.L. Kunii. A connectionist approach to geometrical constraint-solving. In B. Falcidieno and T. Kunii, editors, *Modeling in Computer Graphics.* Springer Verlag, 1993.

[46] S.C. Kleene. *Mathematical Logic.* John Wiley and Sons, New York, 1967.

[47] J.W. Klop. *Background: Computational Structures*, volume 2 of *Handbook of Logic in Computer Science*, chapter Term Rewriting Systems, pages 1–117. Clarendon Press, 1992.

[48] K. Kondo. PIGMOD : Parametric and interactive geometric modeller for mechanical design. *Computer Aided Design*, 22(10):633–644, December 1990.

[49] K. Kondo. Algebraic method for manipulation of dimensional relationships in geometric models. *Computer Aided Design*, 24(3):141–147, March 1992.

[50] G.A. Kramer. Using degrees of freedom analysis to solve geometric constraint systems. In *ACM Symp Foundations of Solid Modeling*, pages 371–378, Austin, TX, 1991.

[51] G.A. Kramer. A geometric constraint engine. *Artificial Intelligence*, 58(1-3):327–360, 1992.

[52] G.A. Kramer. *Solving Geometric Constraints Systems.* MIT Press, 1992.

[53] G. Kwaiter, V. Gaildrat, and R. Caubet. Interactive constraint system for solid modeling objects. In C. Hoffmann and W. Bronsvort, editors, *Fourth Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 265–270. ACM SIGGRAPH, May 1997.

[54] G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, 4(4):331–340, October 1970.

[55] H. Lamure and D. Michelucci. Solving geometric constraints by homotopy. In *ACM Solid Modeling'95*, pages 263–269, Salt Lake City, Utah USA, 1995.

[56] R.S. Latham and A.E. Middleditch. Connectivity analysis: a tool for processing geometric constraints. *Computer Aided Design*, 28(11):917–928, 1996.

[57] J.Y. Lee and K. Kim. Geometric reasoning for knowledge-based parametric design using graph representations. *Computer Aided Design*, 28(10):831–841, 1996.

[58] W. Leler. *Constraint Programming Languages: Their Specification and Generation*. Addison Wesley, 1988.

[59] R. Light and D. Gossard. Modification of geometric models through variational geometry. *Computer Aided Design*, 14:209–214, July 1982.

[60] V.C. Lin, D.C. Gossard, and R.A. Light. Variational geometry in computer-aided design. *ACM Computer Graphics*, 15(3):171–177, August 1981.

[61] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*. Number 29 in Annals of Discrete Mathematics. North-Holland, 1986.

[62] N. Mata. Solving incidence and tangency constraints in 2D. Technical Report LSI-97-3R, Department LiSI, Universitat Politècnica de Catalunya, 1997.

[63] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*. Algorithms and Combinatorics 3. Springer-Verlag, 1987.

[64] G. Nelson. Juno, a constraint-based graphics system. *SIGGRAPH*, pages 235–243, San Francisco, July 22–26 1985.

[65] John K Ousterhout. *Tcl and the Tk toolkit*. Addison-Wesley, 1994.

[66] J. Owen and W. Whiteley. Constraining plane geometric configurations in CAD: Directions and distances. July 1996. Manuscript.

[67] J.C. Owen. Algebraic solution for geometry from dimensional constraints. In *ACM Symp Foundations of Solid Modeling*, pages 397–407, Austin, TX, 1991.

[68] J.C. Owen. Constraints on simple geometry in two and three dimensions. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 6(4):421–434, 1996.

[69] A. Pogorelov. *Geometry*. Mir Publishers, Moscow, 1987.

[70] O.W. Salomons, F. van Slooten, F.J.A.M van Houten, and H.J.J. Kals. Conceptual graphs in constraint based re-design. In *ACM Solid Modeling'95*, pages 55–64, Salt Lake City, Utah USA, 1995.

[71] M. Sannella. The SkyBlue constraint solver. Technical Report 92-07-02, University of Washington, Dep of Computer Science and Engineering, 1993.

[72] D. Serrano. Automatic dimensioning in design for manufacturing. In *Symp. on Solid Modeling. Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 379–386, Austin, TX, 1991.

[73] B. Servatius and W. Whiteley. Constraining plane geometric configurations in CAD: Combinatorics of directions and lengths. 1994. Manuscript.

[74] W. Sohrt. Interaction with constraints in three-dimensional modeling. Master's thesis, Dept of Computer Science, The University of Utah, March 1991.

[75] W. Sohrt and B.D. Brüderlin. Interaction with constraints in 3D modeling. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 1(4):405–425, 1991.

[76] L. Solano and P. Brunet. Constructive constraint-based model for parametric CAD systems. *Computer Aided Design*, 26(8):614–621, August 1994.

[77] N. Sridhar, R. Agrawal, and G.L. Kinzel. Algorithms for the structural diagnosis and decomposition of sparse, underconstrained design systems. *Computer Aided Design*, 28(4):237–249, 1996.

[78] G. Sunde. A CAD system with declarative specification of shape. *Eurographics Workshop on Intelligent CAD Systems*, pages 90–105, April 1987.

[79] I. Sutherland. Sketchpad, a man-machine graphical communication system. In *Proc. of the Spring Joint Comp. Conference*, pages 329–345. IFIPS, 1963.

[80] P. Todd. A k-tree generalization that characterizes consistency of dimensioned engineering drawings. *SIAM J. Disc. Math*, 2(2):255–261, 1989.

[81] R.C. Veltkamp and F. Arbab. Geometric constraint propagation with quantum labels. In B. Falcidieno, I. Herman, and C. Pienovi, editors, *Eurographics Workshop on Computer Graphics and Mathematics*, pages 211–228. Springer, 1992.

[82] A. Verroust. *Etude de Problèmes Liés à la Définition, la Visualisation et l'Animation d'Objects Complexes en Informatique Graphique*. PhD thesis, Universite de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1990. (Written in French).

[83] A. Verroust, F. Schonek, and D. Roller. Rule-oriented method for parameterized computer-aided design. *Computer Aided Design*, 24(10):531–540, October 1992.

[84] W. Whiteley. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter Rigidity and Sceene Analysis, pages 893–916. CRC Press, 1997.

[85] Wen-Tsün Wu. Basic principles of mechanical theorem proving in geometries. *J. of Systems Sciences and Mathematical Sciences*, 4:207–235, 1986.

[86] Wen-Tsün Wu. *Mechanical Theorem Proving in Geometries*. Texts and monographs in symbolic computations. Springer-Verlag, 1994.

[87] Y. Yamaguchi and F. Kimura. A constraint modeling system for variational geometry. In J.U. Turner M.J. Wozny and K. Preiss, editors, *Geometric Modeling for Product Engineering*, pages 221–233. Elsevier North Holland, 1990.

[88] F. Zaldívar. *Teoría de Galois.* Anthropos, 1996.

Apèndix A

Grafs: terminologia i notació

En aquest apèndix repassem la terminologia i la notació bàsiques sobre teoria de grafs que emprem en aquesta tesi. Algunes referències bàsiques sobre teoria de grafs són [4, 15]. La terminologia catalana s'ha extret de [3].

Un *graf orientat* $G = (V, A)$ està format per un conjunt de punts $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, que s'anomenen *vèrtexs*, i per un conjunt de línies orientades $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, que s'anomenen *arcs*, de manera que cada línia uneix dos punts. Dit d'una altra manera, $A \subseteq V \times V$. Alternativament, usarem la notació $V(G)$ per referir-nos al conjunt de vèrtexs del graf G i $A(G)$ per referir-nos al conjunt d'arcs de G.

Si per cada arc $a_k = (v_i, v_j)$ d'un graf G existeix un arc $a_l = (v_j, v_i)$, aleshores es diu que G és *simètric*. S'anomena *aresta* a tot parell d'arcs a_k, a_l.

Sigui $G = (V, A)$ un graf orientat i sigui $a = (v_i, v_j) \in A$ un arc, notarem per $\rho^+_G(a) = v_i$ al vèrtex inicial d'a i per $\rho^-_G(a) = v_j$ al vèrtex final d'a. De la mateixa manera, si $A' \subseteq A$ és un conjunt d'arcs, notarem per $\rho^+_G(A')$ el conjunt dels vèrtexs inicials de les arestes d'A' i per $\rho^-_G(A')$ el conjunt dels vèrtexs finals de les arestes d'A'.

Els *successors* d'un vèrtex v del graf orientat $G = (V, A)$ vénen donats pel conjunt $\Gamma^+_G(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in A\}$ de tots els vèrtexs als quals es pot arribar des de v. Igualment podem definir $\Gamma^-_G(v)$ com el conjunt dels *antecessors* de v.

Un *camí* és qualsevol seqüència ordenada d'arcs on el vèrtex final d'un arc és l'inicial del següent. Siguin $v, w \in V$, direm que w és *assolible* des de v en el graf orientat $G = (V, A)$, notat per $v \overset{*}{\longrightarrow}_G w$, si existeix un camí en G de v a w.

Un *subgraf* $G' = (V', E')$ *d'un graf* $G = (V, E)$ *induït pel conjunt de vèrtexs* V', que notarem per $\mathrm{Ind}(G, V')$, és un graf tal que $V' \subseteq V$ i per tot $v \in V'$ es compleix $\Gamma^+_{G'}(v) = \Gamma^+_G(v) \cap V'$ i $\Gamma^-_{G'}(v) = \Gamma^-_G(v) \cap V'$.

Donada una propietat P aplicable a un graf G, definim un *subgraf maximal* de G respecte de P, que denotarem $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$, com un subgraf de G que verifica P de manera que no hi ha cap altre subgraf $G' = (V', E')$ de G amb $\hat{V} \subset V'$

que també verifiqui P.

Un graf orientat G es diu que és *fortament connex* si entre cada parella de vèrtexs (v_i, v_j) hi ha un camí de v_i a v_j i a l'inrevés. Un *component fort* d'un graf G orientat consisteix en un subgraf maximal de G fortament connex.

Anomenarem *graf bipartit* $B = (V_1, V_2, E)$ a tot graf orientat tal que el seu conjunt de vèrtexs es pot partir en dos subconjunts disjunts V_1 i V_2 de manera que cada $(v_i, v_j) \in E$ verifica que $v_i \in V_1$ i que $v_j \in V_2$.

Un *subgraf bipartit* $B' = (V_1', V_2', E')$ *d'un graf bipartit* $B = (V_1, V_2, E)$ *induït per un conjunt de vèrtexs* V_1' és un graf bipartit tal que $V_1' \subseteq V_1$, $V_2' = \{v \in V_2 \mid \Gamma_B^+(v)\}$, per tot $v \in V_1'$ es compleix $\Gamma_{B'}^+(v) = \Gamma_B^+(v) \cap V_2'$ i per tot $w \in V_2'$ es compleix $\Gamma_{B'}^-(w) = \Gamma_B^-(w) \cap V_1'$. Anàlogament un *subgraf bipartit* $B' = (V_1', V_2', E')$ *d'un graf bipartit* $B = (V_1, V_2, E)$ *induït per un conjunt de vèrtexs* V_2' és un graf bipartit tal que $V_2' \subseteq V_2$, $V_1' = \{v \in V_2 \mid \Gamma_B^-(v)\}$, per tot $v \in V_1'$ es compleix $\Gamma_{B'}^+(v) = \Gamma_B^+(v) \cap V_2'$ i per tot $w \in V_2'$ es compleix $\Gamma_{B'}^-(w) = \Gamma_B^-(w) \cap V_1'$.

Un *aparellament* M en un graf bipartit $B = (V_1, V_2, E)$ ve donat per tot subconjunt d'arestes d'E en el qual no n'hi ha dues que tinguin un vèrtex comú. Donat un aparellament M en un graf B, un vèrtex v_i s'anomena *lliure* si no es troba en cap de les arestes d'M, cas contrari se l'anomena *saturat*. Direm que un aparellament M en un graf B és *màxim* si $|M| \geq |N|$ per a tot altre aparellament N en B. Un aparellament M en un graf B és *perfecte* si cadascun dels vèrtexs de B està saturat en M.

Apèndix B

Sistemes de reducció abstractes

A continuació s'introdueix la terminologia i la notació bàsiques sobre sistemes de reducció abstractes. També s'inclouen alguns dels resultats dels quals es fa ús en aquesta tesi. Tan la notació com els resultats que s'exposen s'han extret de [47]. Per començar, es defineix el concepte de sistema de reducció abstracte.

Definició B.1. Un *sistema de reducció abstracte* és una estructura

$$\mathcal{A} = \langle A, (\longrightarrow_\alpha)_{\alpha \in I} \rangle$$

constituïda per un conjunt A i una seqüència de relacions binàries $\longrightarrow_\alpha$ sobre A, indexades pels elements d'I, anomenades relacions de *reducció* o de *reescriptura*.

Sigui $\mathcal{A} = \langle A, (\longrightarrow_\alpha)_{\alpha \in I} \rangle$ un sistema de reducció abstracte. Siguin $a, b \in A$. El fet que $(a, b) \in \longrightarrow_\alpha$ també s'escriu com $a \longrightarrow_\alpha b$. Si $a \longrightarrow_\alpha b$, es diu que b és una (α-)*reducció en una passa* d'a. Notarem per $\longrightarrow_\alpha^*$ la *clausura transitiva i reflexiva* de $\longrightarrow_\alpha$, per $\longrightarrow_\alpha^\equiv$ la *clausura reflexiva* de $\longrightarrow_\alpha$, per $\longleftarrow_\alpha$ la *relació simètrica* de $\longrightarrow_\alpha$ i per $=_\alpha$ la *relació d'equivalència generada* per $\longrightarrow_\alpha$. Direm que b és una (α-)*reducció* d'a si $a \longrightarrow_\alpha^* b$, és a dir, existeixen $a_0, \dots, a_n \in A$ i existeix una seqüència de reduccions en una passa tal que $a \equiv a_0 \longrightarrow_\alpha a_1 \longrightarrow_\alpha \cdots \longrightarrow_\alpha a_n \equiv b$ on $\equiv$ denota la identitat d'elements en A.

A continuació es defineixen algunes propietats importants dels sistemes de reducció abstractes. En primer lloc es defineix el fet que dues regles commuten, [47].

Definició B.2. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow_\alpha, \longrightarrow_\beta \rangle$ un sistema de reducció abstracte. Aleshores

1. $\longrightarrow_\alpha$ *commuta feblement* amb $\longrightarrow_\beta$ si

$$\forall a, b, c \in A \; \exists d \in A \; (c \longleftarrow_\beta a \longrightarrow_\alpha b \implies c \longrightarrow_\alpha^* d \longleftarrow_\beta^* b).$$

2. $\longrightarrow_\alpha$ *commuta* amb $\longrightarrow_\beta$ si $\longrightarrow_\alpha^*$ i $\longrightarrow_\beta^*$ commuten feblement.

A continuació es defineix el concepte de confluència o propietat de Church-Rosser, [47].

Definició B.3. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow\rangle$ un sistema de reducció abstracte. Aleshores

1. $\longrightarrow$ és *feblement confluent* o *feblement Church-Rosser* si commuta feblement amb ella mateixa.
2. $\longrightarrow$ és *subcommutativa* si
$$\forall a, b, c \in A\ \exists d \in A\ (c \longleftarrow a \longrightarrow b \implies c \longrightarrow^{\equiv} d \longleftarrow^{\equiv} b).$$
3. $\mathcal{A}$ és *confluent* o *Church-Rosser* si $\longrightarrow$ commuta amb ella mateixa.

Un altre grup de propietats importants dels sistemes de reducció abstractes fan referència a l'acabament i a les formes normals, [47].

Definició B.4. Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow\rangle$ un sistema de reducció abstracte. Direm que

1. $a \in A$ *està en forma normal* si no hi ha cap $b \in A$ tal que $a \longrightarrow b$.
2. $b \in A$ *té una forma normal* si existeix $a \in A$ que està en forma normal i $b \longrightarrow^* a$.
3. Es diu que un sistema de reducció abstracte és *noetherià*[1] o *d'acabament finit* si tota seqüència de reducció $a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \cdots$ acaba.
4. $\mathcal{A}$ té la propietat de *forma normal única* si
$$\forall a, b \in A\ (a = b\ \wedge\ a, b \text{ estan en forma nomal} \implies a \equiv b).$$
5. $\mathcal{A}$ té la propietat de *forma normal* si
$$\forall a, b \in A\ (a \text{ està en forma normal}\ \wedge\ a = b \implies b \longrightarrow^* a).$$

A continuació es reprodueixen alguns resultats de la teoria de sistemes de reducció abstractes. Els primers resultats que es presenten reflecteixen la importància de la confluència, [47].

Teorema B.1. *Sigui $\mathcal{A} = \langle A, \longrightarrow\rangle$ un sistema de reducció abstracte. Aleshores*

1. *Si $\mathcal{A}$ és noetherià i feblement confluent aleshores és confluent.*
2. *Si $\mathcal{A}$ és confluent aleshores té la propietat de forma normal.*
3. *Si $\mathcal{A}$ té la propietat de forma normal aleshores té la propietat de forma normal única.*

[1] *Strongly normalizing* o *terminating* segons Klop, [47].

El següent teorema, [47], possibilita la demostració de la confluència d'un sistema de reducció abstracte a partir de les demostració que tot parell de regles del sistema de reducció abstracte commuta.

Teorema B.2. *Sigui* $\mathcal{A} = \langle A, (\longrightarrow_\alpha)_{\alpha \in I} \rangle$ *un sistema de reducció abstracte tal que per tot* $\alpha, \beta \in I$, $\longrightarrow_\alpha$ *commuta amb* $\longrightarrow_\beta$. *(En particular,* $\longrightarrow_\alpha$ *commuta amb ella mateixa.) Aleshores, la unió* $\bigcup_{\alpha \in I} \longrightarrow_\alpha$, *notada per* $\longrightarrow$, *és confluent.*

Finalment, es diu que un sistema de reducció abstracte és *canònic*[2] quan és d'acabament finit i confluent alhora.

[2] *Complete* o *uniquely terminating* alternativament, [47].

Apèndix C

Llenguatge Geomètric Declaratiu

En aquest apèndix es descriuen, per una banda, els tipus d'elements geomètrics i de restriccions que poden aparèixer en l'especificació d'un problema geomètric definit en base a restriccions i, per l'altra, les operacions geomètriques que composen les seqüències d'operacions geomètriques. També es presenta la sintaxi de les seqüències d'operacions geomètriques conjuntament amb els convenis que s'han adoptat per tal d'anomenar els elements geomètrics respecte d'un sistema de referència.

C.1 Elements geomètrics i restriccions

Un problema geomètric definit en base a restriccions s'especifica com una conjunció de predicats elementals. Els predicats elementals són restriccions lògiques o bé equacions on s'invoca alguna de les funcions de la Secció C.1.3, que anomenarem restriccions numèriques. Primer es descriuran els tipus elementals als que s'avaluen les restriccions numèriques. Es continuarà enumerant els elements geomètrics i les restriccions que poden aparèixer en la descripció d'un problema

C.1.1 Tipus elementals

Els tipus elementals que s'empraran són el tipus `Booleà`, el tipus real, notat per $\mathbb{R}$, i els subconjunts dels reals següents: els reals estrictament positius, notats per $\mathbb{R}^+$, els reals positius o zero, notats per $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, i el tipus `Angle` definit com el subconjunt dels reals

$$\texttt{Angle} = \{r \in \mathbb{R} \mid -\pi/2 \leq r \leq \pi/2\}$$

amb les operacions següents.

`__+__, __-__:` $\texttt{Angle} \times \texttt{Angle} \rightarrow \texttt{Angle}$

```
sin, cos, tan: Angle → ℝ
arcsin, arccos, arctan: ℝ → Angle
```

C.1.2 Elements geomètrics

S'ofereixen elements geomètrics de tipus `Punt`, `Recta` i `Cercle`. Les operacions bàsiques sobre aquests tipus es presenten a la Secció C.2.1.

C.1.3 Restriccions

Les restriccions numèriques són funcions que tenen com a domini parells d'elements geomètrics i com a imatge els reals. Considerem les restriccions numèriques següents.

dist Distància entre punts.

```
dist: Punt × Punt → ℝ⁺

∀ p, q: Punt
  dist(p, q) = sqrt(sqr((x(p) - x(q))) + sqr((y(p) - y(q))))
```

dist Distància entre un punt i una recta.

```
dist: Punt × Recta → ℝ⁺ ∪ {0}

∀ p: Punt, r: Recta
  dist(p, r) = abs(a(r) * x(p) + b(r) * y(p) + c(r))
```

angle Angle mínim en sentit antihorari entre dues rectes.

```
angle: Recta × Recta → Angle

∀ r, s: Recta
  angle(r, s) = arctan(b(s) / a(s)) - arctan(b(r) / a(r))
```

Les restriccions lògiques són predicats sobre parells d'elements geomètrics. Considerarem les restriccions lògiques següents.

sobre El punt està sobre la recta.

```
sobre: Punt × Recta → Booleà

∀ p: Punt, r: Recta
  sobre(p, r) ≡ dist(p, r) = 0
```

sobre El punt està sobre el cercle.

```
sobre: Punt × Cercle → Booleà

∀ p: Punt, c: Cercle
  sobre(p, c) ≡ dist(p, centre(c)) = radi(c)
```

tg La recta i el cercle són tangents.

```
tg: Cercle × Recta → Booleà

∀ c: Cercle, r: Recta
  tg(c, r) ≡ dist(centre(c), r) = radi(c)
```

tg Els cercles són tangents.

```
tg: Cerce × Cercle → Booleà

∀ c, d: Cercle
  tg(c, d) ≡ dist(centre(c), centre(d)) = abs(radi(c) ± radi(d))
```

També es consideren restriccions les operacions bàsiques sobre cercles `centre` i `radi` descrites en la Secció C.2.1.

C.2 Operacions geomètriques

La fase de generació del mètode constructiu produeix una seqüència d'operacions geomètriques. Essencialment, la seqüència d'operacions geomètriques és una seqüència de definicions de variables. Les expressions involucrades en la definició de les variables podran contenir, a més de les restriccions numèriques de la Secció C.1.3, les operacions geomètriques que es presenten a continuació.

C.2.1 Operacions geomètriques bàsiques

Les operacions geomètriques bàsiques són les operacions constructores i consultores més simples associades a cada un dels tipus d'elements geomètrics.

Sobre el tipus `Punt` es defineixen les operacions següents.

puntXY Crea un valor de tipus `Punt` a partir de les seves coordenades cartesianes.

```
puntXY: ℝ × ℝ → Punt
```

x, y Consulten les coordenades x i y d'un punt respectivament.

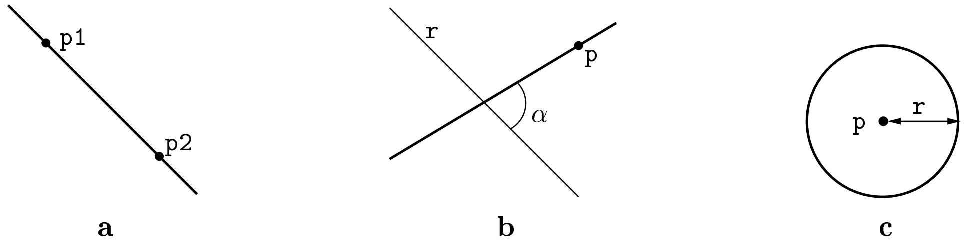


Figura C.1: Operacions geomètriques bàsiques sobre rectes i cercles.

```
x, y: Punt → ℝ

∀ a, b: ℝ
  x(puntXY(a, b)) = a;
  y(puntXY(a, b)) = b;
```

Sobre el tipus `Recta` es defineixen les operacions següents.

recta2P Recta que passa per dos punts. Veieu la Figura C.1a. La signatura d'aquesta operació és la següent.

```
recta2P: Punt × Punt → Recta
```

rectaAP Recta que passa per un punt i que forma angle amb una recta donada. Veieu la Figura C.1b. La signatura d'aquesta operació és la següent.

```
rectaAP: Recta × Angle × Punt → Recta
```

a, b, c Consulten els coeficients de l'equació de la recta representada en forma normal $ax + by + c = 0$ on $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. L'especificació d'aquestes operacions és la següent.

```
a, b, c: Recta → ℝ

∀ p, p1, p2: Punt, r: Recta, α: Angle
  a(recta2P(p1, p2)) = an / n,
  b(recta2P(p1, p2)) = bn / n,
  c(recta2P(p1, p2)) = (y(p2) * x(p1) - y(p1) * x(p2)) / n
    on
      an = y(p1) - y(p2),
      bn = x(p2) - x(p1),
      n = sqrt(an * an + bn * bn);
  a(rectaAP(r, α, p)) = vj / vn,
  b(rectaAP(r, α, p)) = -vi / vn,
  c(rectaAP(r, α, p)) = (-vj * x(p) - y(p) * vi) / vn
    on
      vi = -b(r) * cos(α) - a(r) * sin(α),
```

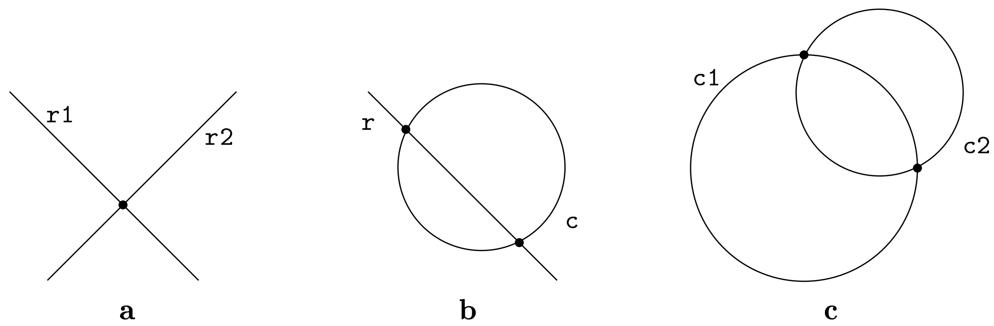


Figura C.2: Interseccions entre rectes i cercles.

```
vj = -b(r) * sin(α) + a(r) * cos(α),
vn = sqrt(vi * vi + vj * vj);
```

Sobre el tipus `Cercle` es defineixen les operacions següents.

cercleCR Cercle definit pel centre i el radi. Veieu la Figura C.1c. La signatura d'aquesta operació és la següent.

```
cercleCR: Punt × ℝ⁺ → Cercle
```

centre, radi Consulten el centre i el radi d'un cercle respectivament. L'especificació d'aquestes operacions és la següent.

```
centre: Cercle → Punt
radi: Cercle → ℝ⁺
∀ p: Punt, r: ℝ⁺
  centre(cercleCR(p, r)) = p;
  radi(cercleCR(p, r)) = r;
```

C.2.2 Interseccions

Les operacions d'intersecció entre cercles i rectes es corresponen amb les operacions realitzables amb instruments com el regle i el compàs.

Algunes d'aquestes operacions obtenen més d'una solució com en el cas de les interseccions entre rectes i cercles. En aquests casos les solucions múltiples es retornen com una llista de solucions. S'emprarà la notació `[a, b, c]` per representar la llista que conté els elements `a`, `b` i `c`. `[]` denota la llista buida.

Abans de descriure les operacions d'intersecció definirem el significat d'alguns predicats auxiliars emprats en aquestes operacions. El predicat `paral·leles(a, b)` s'ha d'interpretar com que les rectes `a` i `b` són paral·leles. El predicat `interseca(a, b)` indica si els cercles o rectes `a` i `b` intersequen. El predicat `tangent(a, b)` s'ha d'interpretar com que el cercle `a` és tangent a la recta o al cercle `b`.

irr Intersecció de rectes. Veieu la Figura C.2a. L'especificació d'aquesta operació és la següent.

```
irr: Recta × Recta → [Punt]

∀ r1, r2: Recta, p: Punt
  paral leles(r1, r2) ⇒
    [] = irr(r1, r2)
  ¬ paral leles (r1, r2) ⇒
    ([p] = irr(r1, r2) ≡ sobre(p, r1) ∧ sobre(p, r2))
```

irc Intersecció de cercle i recta. Veieu la Figura C.2b. L'especificació d'aquesta operació és la següent.

```
irc: Recta × Cercle → [Punt]

∀ r: Recta, c: Cercle, p, p1, p2: Punt
  ¬ interseca(r, c) ⇒
    [] = irc(r, c)
  interseca(r, c) ∧ tg(c, r) ⇒
    ([p] = irc(r, c) ≡ sobre(p, r) ∧ sobre(p, c))
  interseca(r, c) ∧ ¬ tg(c, r) ⇒
    ([p1, p2] = irc(r, c) ≡ p1 ≠ p2
      ∧ sobre(p1, r) ∧ sobre(p1, c)
      ∧ sobre(p2, r) ∧ sobre(p2, c))
```

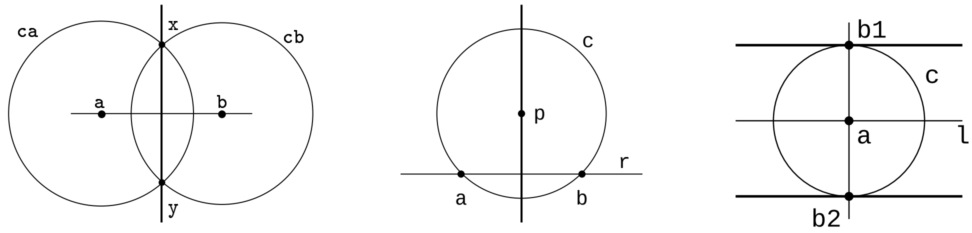
icc Intersecció de cercles. Veieu la Figura C.2c. L'especificació d'aquesta operació és la següent.

```
icc: Cercle × Cercle → [Punt]

∀ c1, c2: Cercle, p, p1, p2: Punt
  ¬ interseca(c1, c2) ⇒
    [] = icc(c1, c2)
  interseca(c1, c2) ∧ tg(c1, c2) ⇒
    ([p] = icc(c1, c2) ≡ sobre(p, c1) ∧ sobre(p, c2))
  interseca(c1, c2) ∧ ¬ tg(c1, c2) ⇒
    ([p1, p2] = icc(c1, c2) ≡ p1 ≠ p2
      ∧ sobre(p1, c1) ∧ sobre(p1, c2)
      ∧ sobre(p2, c1) ∧ sobre(p2, c2))
```

C.3 Operacions geomètriques compostes

Són operacions geomètriques que no es poden realitzar de forma immediata amb regle i compàs, però que es poden expressar com seqüències d'operacions geomètriques bàsiques. Les operacions que es presenten a continuació han



a **b** **c**

Figura C.3: Operacions geomètriques (a) `rectaB`, (b) `rectaPdP` i (c) `rectaPlD`.

estat seleccionades per la seva relació amb el càlcul dels llocs geomètrics de la Secció 4.3.2. Les construccions que aquí es presenten es descriuen des d'un punt de vista geomètric clàssic en [38].

rectaB Recta bisector d'un segment donat. Veieu la Figura C.3a. La seqüència d'operacions geomètriques que calcula aquesta operació és la següent.

```
rectaB: Punt × Punt → Recta

rectaB(a, b) = recta2P(x, y)
  on
    [x, y] = icc(ca, cb),
    ca = cercleCR(a, r),
    cb = cercelCR(b, r),
    r > dist(a, b) / 2
```

rectaPdP Recta perpendicular que passa per un punt. Veieu la Figura C.3b. La seqüència d'operacions geomètriques que calcula aquesta operació és la següent.

```
rectaPdP: Recta × Punt → Recta

rectaPdP(r, p) = rectaB(a, b)
  on
    [a, b] = irc(r, c),
    c = cercleCR(p, rd),
    rd > dist(p, r)
```

rectaPlD Recta paral·lela a una certa distància. Veieu la Figura C.3c. La seqüència d'operacions geomètriques que calcula aquesta operació és la següent.

```
rectaPlD: Recta × Distancia → [Recta]

rectaPlD(l, h) = [rectaPdP(r, b1), rectaPdP(r, b2)]
  on
    r = rectaPdP(l, a),
```

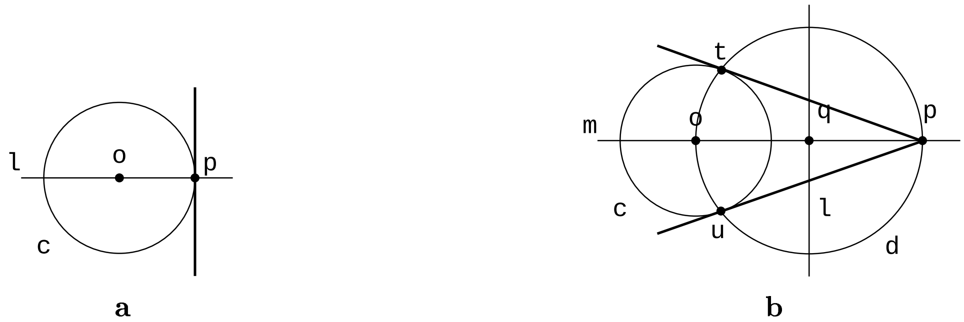


Figura C.4: Operació geomètrica `rectaTgCP` (a) quan el punt està sobre el cercle i (b) quan el punt és exterior al cercle.

```
sobre(a, l),
[b1, b2] = irc(r, c),
c = cercleCR(a, h)
```

rectaTgCP Recta tangent a un cercle i que passa per un punt donat. Veieu la Figura C.4. La seqüència d'operacions geomètriques que calcula aquesta operació és la següent.

```
rectaTgCP: Cercle × Punt → [Recta]

rectaTgCP(c, p) = [rectaPdP(l, p)]
  si sobre(p, c)
  on
    l = recta2P(p, o),
    o = centre(c)

rectaTgCP(c, p) = [recta2P(p, t), recta2P(p, u)]
  si dist(p, o) > radi(c)
  on
    [t, u] = icc(c, d),
    d = cercleCR(q, r),
    q = irr(l, m),
    r = dist(q, p),
    l = recta2P(o, p),
    m = rectaB(o, p),
    o = centre(c)
```

cercleAC Cercle definit pel teorema de l'arc capaç. Veieu la Figura C.5. La seqüència d'operacions geomètriques que calcula aquesta operació és la següent.

```
cercleAC: Punt × Punt × Angle → Cercle

cercleAC(a, b, α) = cercleCR(o, r)
  on
```

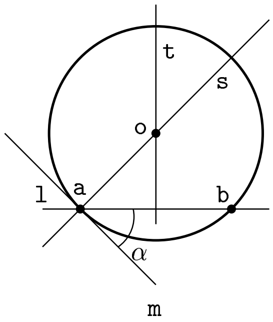


Figura C.5: Operació geomètrica `cercleAC`.

```
o = irr(s, t),
r = dist(o, b),
s = rectaPdP(m, a),
t = rectaB(a, b),
m = rectaAP(l, α, a),
l = recta2P(a, b)
```

C.4 Matrius i transformacions geomètriques

Algunes de les regles requereixen posicionar punts respecte d'un sistema de referència diferent d'aquell en el què estan definits. Els canvis de sistema de referència es realitzen usant matrius de transformació. Per tant, serà necessari el tipus `Matriu` amb les operacions següents.

matComp Retorna la matriu composició de les dues matrius.

```
matComp: Matriu × Matriu → Matriu
```

matTrans Retorna la matriu que trasllada el primer punt sobre el segon.

```
matTrans: Punt × Punt → Matriu
```

matRot Retorna la matriu de rotació en sentit antihorari al voltant d'un punt.

```
matRot: Punt × Angle → Matriu
```

matAplicar Aplicar una matriu de transformació a un punt.

```
matAplicar: Matriu × Punt → Punt
```

C.5 Resolució de sistemes d'equacions

El mètode híbrid requereix un mecanisme general per incloure en la seqüència d'operacions geomètriques la resolució d'un sistema d'equacions. S'ha optat per incloure una construcció anomenada `resoldre` a la que se subministren el conjunt d'equacions a resoldre i el conjunt de variables de les equacions. Aquesta construcció produeix la definició de cada una de les variables que se li subministra i, per tant, l'efecte és el mateix que si les variables haguessin estat definides independentment.

C.6 Seqüència d'operacions geomètriques

El mètode constructiu del Capítol 4 representa la solució d'un problema geomètric definit en base a restriccions com una seqüència d'operacions geomètriques. Una seqüència d'operacions geomètriques és una seqüència de construccions amb regle i compàs que resol un problema. Essencialment una seqüència d'operacions geomètriques és una successió de definicions de variables. La sintaxi d'una seqüència d'operacions geomètriques ve determinada per la gramàtica següent de la qual `sog` és el símbol inicial.

```
sog → definició sog
sog → definició
definició → variable = expressió
definició → resoldre ( { equacions }, { variables } )
expressió → valor
expressió → variable
expressió → operador ( expressions )
expressió → operador_prefix expressió
expressió → expressió operador_infix expressió
expressions → expressió , expressions
expressions → expressió
equació → expressió = expressió
equacions → equació , equacions
equacions → equació
variables → variable , variables
variables → variable
```

Les variables són identificadors amb la sintaxi habitual i poden ser de tipus elemental, de tipus element geomètric o de tipus matriu de transformació. Els valors són sempre de tipus elementals. Es consideren operadors les operacions geomètriques definides a les seccions precedents. Els operadors prefixos i infixos són els habituals sobre els tipus elementals.

Les variables apareixen només un cop en la seqüència. En una expressió, es pot substituir tota aparició d'una variable per la seva definició. Cal tenir en compte que certs operadors es poden avaluar a una llista de valors. Considerarem que existeix algun mecanisme extern que permet seleccionar un d'aquests valors.

Normalment caldrà considerar que un element geomètric està referit respecte de diferents sistemes de referència en una mateixa seqüència d'operacions geomètriques. Adoptarem com a conveni per aquests casos un nom compost per a l'element geomètric de la forma

```
nom_element.nom_referència
```

Per exemple, usarem noms com `p1.cd4` per referir-nos al punt `p1` segons el sistema de referència `cd4`.

Apèndix D

Conjunt de regles

Aquest apèndix conté la recopilació de totes les regles de traducció, d'anàlisi i de generació dels mètodes constructiu i híbrid presentats en aquesta tesi. L'apèndix s'estructura en dues parts. A la primera es defineixen les regles del mètode constructiu presentat al Capítol 4 i a la segona es descriuen les regles del mètode híbrid presentat al Capítol 6.

D.1 Regles del mètode constructiu

A continuació es descriu el conjunt de regles del mètode constructiu presentat al Capítol 4. El conjunt de regles s'ha estructurat segons les fases del mètode constructiu. Les regles es presenten en el format següent:

Nom de la regla Descripció informal.

```
part esquerra → part dreta
```

Una regla s'ha d'interpretar com que el patró de la part esquerra es substitueix pel patró de la part dreta.

D.1.1 Regles de la fase de traducció

La fase de traducció parteix d'un problema geomètric definit en base a restriccions que ha estat expressat com un predicat el qual es transforma a una representació interna basada en conjunts de restriccions. Aquesta fase consta de dues parts. A la primera, les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles es tradueixen a restriccions de distància entre punts i distància perpendicular entre un punt i una recta. Les restriccions sobre rectes s'interpreten com restriccions sobre segments. A la segona, les restriccions de distància entre punts, les restriccions de distància perpendicular entre un punt i un segment i les restriccions d'angle entre segments es tradueixen a conjunts de restriccions elementals.

La fase de traducció produeix també una seqüència on s'enregistren les regles de traducció que s'apliquen, veieu la Figura 4.1. Per cada regla de traducció s'especifica la informació que s'enregistra en aquesta seqüència. La fase de generació processarà la seqüència de regles de traducció per tal de generar una part de la seqüència d'operacions geomètriques associada al problema. Per les regles de traducció que tenen associada una subseqüència d'operacions geomètriques buida s'ha omès aquesta informació.

Traducció de restriccions sobre cercles i rectes

Les regles de traducció de restriccions sobre cercles amb radi fix i rectes a restriccions de distància entre punts i distància entre un punt i un segment són les següents:

T1 Les restriccions de coincidència es transformen a restriccions de distància respecte del centre del cercle igual al radi.

```
radi(c) = r ∧ centre(c) = p ∧ sobre(q, c) →
  dist(p, q) = r ∧ radi(c) = r ∧ centre(c) = p
```

T2 Les restriccions de tangència entre cercles es transformen a restriccions de distància entre els centres.

```
radi(c1) = r1 ∧ centre(c1) = p1 ∧
radi(c2) = r2 ∧ centre(c2) = p2 ∧ tg(c1, c2) →
  dist(p1, p2) = |r1 ± r2| ∧
  radi(c1) = r1 ∧ centre(c1) = p1 ∧
  radi(c2) = r2 ∧ centre(c2) = p2
```

T3 Les restriccions de tangència entre un cercle i una recta es transformen a restriccions de distància perpendicular entre el centre del cercle i la recta.

```
radi(c) = r ∧ centre(c) = p ∧ tg(c, s) →
  dist(p, s) = r ∧ radi(c) = r ∧ centre(c) = p
```

T4 Dues restriccions de coincidència de dos punts sobre una mateixa recta generen un segment identificat amb el mateix identificador que la recta. Requereix que no hi hagi cap altre segment amb el mateix identificador.

```
sobre(p1, r) ∧ sobre(p2, r) → segment(r, p1, p2)
```

La regla T4 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
T4(r, p1, p2)
```

T5 La resta de restriccions de coincidència es transformen a restriccions de distància punt segment.

```
sobre(p, r) ∧ segment(r, p1, p2) →
  dist(p, r) = 0 ∧ segment(r, p1, p2)
```

Creació dels conjunts de restriccions elementals

L'estat de la fase d'anàlisi es representa mitjançant el predicat `e(D, A, H)` on `D` és la família de conjunts **CD**, `A` és la família de conjunts **CA** i `H` és la família de conjunts **CH**. Les regles que permeten calcular l'estat inicial de la fase d'anàlisi a partir de les restriccions del problema geomètric definit en base a restriccions són les següents:

C0 Inicialment, les famílies de conjunts **CD**, **CA** i **CH** són buides.

```
→ e(∅, ∅, ∅)
```

C1 Genera un conjunt **CA** elemental a partir d'una restricció d'angle entre segments.

```
angle(s1, s2) = α ∧ e(D, A, H) → e(D, A ∪ {{s1, s2}}, H)
```

Sigui `ca` un nou identificador pel conjunt **CA** creat per aquesta regla. Aleshores la regla C1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
C1(ca, s1, s2, α)
```

C2 Genera un conjunt **CD** elemental a partir d'una restricció de distància entre punts.

```
dist(p1, p2) = d ∧ e(D, A, H) → e(D ∪ {{p1, p2}}, A, H)
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per aquesta regla. Aleshores la regla C2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
C2(cd, p1, p2, d)
```

C3 Genera un conjunt **CH** elemental a partir d'una restricció de distància perpendicular entre un punt i un segment.

```
dist(p, s) = h ∧ e(D, A, H) → e(D, A, H ∪ {{p, s}})
```

Sigui `ch` un nou identificador pel conjunt **CH** creat per aquesta regla. Aleshores la regla C3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
C3(ch, p, s, h)
```

Clausura transitiva de les restriccions d'angle

Les restriccions d'angle compleixen la propietat transitiva. Aquesta regla genera la clausura transitiva de les restriccions d'angle.

M Si dos conjunts **CA** comparteixen un segment, aleshores es crea un nou **CA** que conté els dos segments no compartits.

```
e(D, A, H) ∧ {{s1, s2}, {s1, s3}} ∈ A ∧ {s2, s3} ∉ A →
  e(D, A ∪ {{s2, s3}}, H)
```

Sigui `ca` un nou identificador pel conjunt **CA** creat per aquesta regla. Sigui `ca1` l'identificador del conjunt **CA** que conté els segments `s1` i `s2`, i sigui `ca2` l'identificador del conjunt **CA** que conté els segments `s1` i `s3`. Aleshores la regla M s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
M(ca, s1, s2, s3, ca1, ca2)
```

D.1.2 Regles de la fase d'anàlisi

En aquesta secció es descriuen les regles que intervenen en la fase d'anàlisi. Les regles s'han agrupat per configuracions, és a dir, segons el nombre de conjunts **CD**, **CA** i **CH** involucrats en cada regla. En cada apartat es dóna la regla d'anàlisi genèrica per totes les regles amb la mateixa configuració i a continuació es descriuen les condicions particulars $\mathcal{C}$ que s'han de donar per tal que es pugui aplicar cada una de les regles.

La fase d'anàlisi produeix també una seqüència on s'enregistren les regles d'anàlisi que s'apliquen, veieu la Figura 4.1. Per cada regla d'anàlisi s'especifica la informació que s'enregistra en aquesta seqüència. La fase de generació processarà la seqüència de regles d'anàlisi per tal de generar una part de la seqüència d'operacions geomètriques associada al problema. Per les regles d'anàlisi que tenen associada una subseqüència d'operacions geomètriques buida s'ha omès aquesta informació.

Configuració DDD

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

$$
\begin{array}{l}
\texttt{e(D, A, H)} \wedge \texttt{\{cd1, cd2, cd3\}} \subseteq \texttt{D} \wedge \mathcal{C} \rightarrow \\
\quad \texttt{e(} \\
\qquad \texttt{(D} - \texttt{\{cd1, cd2, cd3\})} \cup \texttt{\{cd1} \cup \texttt{cd2} \cup \texttt{cd3\},} \\
\qquad \texttt{A,} \\
\qquad \texttt{H} \\
\quad \texttt{)}
\end{array}
$$

Només hi ha una regla amb aquesta configuració.

DDD La regla DDD s'obté combinant els llocs geomètrics CR i CR. Veieu la Taula 4.1.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{C} \equiv \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \texttt{\{p1\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{p} \in \texttt{cd2} - \texttt{\{p1\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{cd1} \cap \texttt{cd3} = \texttt{\{p2\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{p} \in \texttt{cd3} - \texttt{\{p2\}}
\end{array}
$$

Reordenant i per la definició d'intersecció de conjunts s'obté

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{C} \equiv \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \texttt{\{p1\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{p} \in \texttt{(cd2} - \texttt{\{p1\})} \cap \texttt{(cd3} - \texttt{\{p2\})} \\
\quad \wedge\ \texttt{cd1} \cap \texttt{cd3} = \texttt{\{p2\}}
\end{array}
$$

i amb la hipòtesi que el problema geomètric definit en base a restriccions és estructuralment ben restringit

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{C} \equiv \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \texttt{\{p1\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{cd2} \cap \texttt{cd3} = \texttt{\{p\}} \\
\quad \wedge\ \texttt{cd1} \cap \texttt{cd3} = \texttt{\{p2\}}
\end{array}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per aquesta regla i siguin `cd1`, `cd2` i `cd3` els identificadors dels tres conjunts **CD** implicats en la regla. Aleshores la regla DDD s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDD(cd, p1, p2, p, cd1, cd2, cd3)
```

Configuració DDA

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ {cd1, cd2} ⊆ D ∧ ca1 ∈ A ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1, cd2}) ∪ {cd1 ∪ cd2 ∪ punts(ca1)},
       A - {ca1},
       H
     )
```

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DDA1 La regla DDA1 s'obté combinant els llocs geomètrics CR i RA. Veieu la Taula 4.2.

Les condicions $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són

```
𝒞 ≡ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
  ∧ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) − cd1 = ∅
  ∧ punts(s2) − cd1 = {p}
      on ca1 = {s1, s2}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat pel la regla. Siguin `cd1`, `cd2` i `ca1` els conjunts de restriccions que intervenen en la regla. Siguin `punts(s1) = {p2, p3}` i `punts(s2) = {p, p4}`. Aleshores la regla DDA1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDA1(cd, p1, p2, p3, p4, p, s1, s2,
     cd1, cd2, ca1)
```

DDA2 La regla DDA2 s'obté combinant els llocs geomètrics CC i CR. Veieu la Taula 4.2.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
𝒞 ≡ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) ∩ punts(s2) = {p}
  ∧ cd1 ∩ cd2 = {p1}
  ∧ p ∈ cd2 − {p1}
      on ca1 = {s1, s2}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat pel la regla. Siguin `cd1`, `cd2` i `ca1` els conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1) = {p, p2}` i `punts(s2) = {p, p3}`. Aleshores la regla DDA2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDA2(cd, p1, p2, p3, p, s1, s2, cd1, cd2, ca1)
```

DDA3 La regla DDA3 permet fusionar dos conjunts **CD**, A i B, que comparteixen un punt si existeix un conjunt **CA** tal que un dels segments està inclòs en A i l'altre en B. Veieu la Figura 4.7.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{punts(s1)} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\wedge\ & \texttt{punts(s2)} - \texttt{cd2} = \emptyset \\
\wedge\ & \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \{\texttt{p1}\} \\
& \quad \texttt{on ca1} = \{\texttt{s1, s2}\}
\end{aligned}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat pel la regla. Siguin `cd1`, `cd2` i `ca1` els conjunts de restriccions implicats en la regla. Sigui `p1` el punt compartit pels conjunts **CD**. Aleshores la regla DDA3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDA3(cd, p1, s1, s2, cd1, cd2, ca1)
```

Configuració DDH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

$$
\begin{aligned}
& \texttt{e(D, A, H)} \wedge \{\texttt{cd1, cd2}\} \subseteq \texttt{D} \wedge \texttt{ch1} \in \texttt{H} \wedge \mathcal{C} \rightarrow \\
& \quad \texttt{e(} \\
& \quad\quad (\texttt{D} - \{\texttt{cd1, cd2}\}) \cup \{\texttt{cd1} \cup \texttt{cd2} \cup \texttt{punts(ch1)}\}, \\
& \quad\quad \texttt{A,} \\
& \quad\quad \texttt{H - \{ch1\}} \\
& \quad \texttt{)}
\end{aligned}
$$

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DDH1 La regla DDH1 s'obté combinant els llocs geomètrics CR i RP. Veieu la Taula 4.3.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \{\texttt{p1}\} \\
\wedge\ & \texttt{p} \in \texttt{cd2} - \{\texttt{p1}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(ch1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(seg(ch1))} - \texttt{cd1} = \emptyset
\end{aligned}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `cd2` i `ch1` els conjunts de restriccions implicats en la regla. Sigui `s = seg(ch1)` i sigui `punts(s) =` {`p2, p3`}. Aleshores la regla DDH1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDH1(cd, p1, p2, p3, p, s, cd1, cd2, ch1)
```

DDH2 La regla DDH2 s'obté combinant els llocs geomètrics CR i RT. Veieu la Taula 4.3.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{cd1} \cap \texttt{cd2} = \{\texttt{p1}\} \\
\wedge\ & \texttt{p} \in \texttt{cd2} - \{\texttt{p1}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(ch1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(seg(ch1))} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\}
\end{aligned}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `cd2` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Sigui `s` = `seg(ch1)` i sigui `punts(s)` = {`p, p3`}. Aleshores la regla DDH2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DDH2(cd, p1, p2, p3, p, s, cd1, cd2, ch1)
```

Configuració DAA

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

$$
\begin{aligned}
& \texttt{e(D, A, H)} \wedge \texttt{cd1} \in \texttt{D} \wedge \{\texttt{ca1, ca2}\} \subseteq \texttt{A} \wedge \mathcal{C} \rightarrow \\
& \quad \texttt{e(} \\
& \quad\quad (\texttt{D} - \{\texttt{cd1}\}) \cup \{\texttt{cd1} \cup \texttt{punts(ca1)} \cup \texttt{punts(ca2)}\}, \\
& \quad\quad \texttt{A} - \{\texttt{ca1, ca2}\}, \\
& \quad\quad \texttt{H} \\
& \quad \texttt{)}
\end{aligned}
$$

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DAA1 La regla DAA1 s'obté combinant els llocs geomètrics RA i RA. Veieu la Taula 4.4.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{punts(ca1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(s1)} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\wedge\ & \texttt{punts(s2)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(ca2)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\wedge\ & \texttt{punts(s3)} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\wedge\ & \texttt{punts(s4)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
& \quad \texttt{on} \quad \texttt{ca1} = \{\texttt{s1, s2}\} \\
& \quad\quad \wedge\ \texttt{ca2} = \{\texttt{s3, s4}\}
\end{aligned}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ca2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1)` = {`p1, p2`}, `punts(s2)` = {`p, p5`}, `punts(s3)` = {`p3, p4`} i `punts(s1)` = {`p, p6`}. Aleshores la regla DAA1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAA1(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, p6, s1, s2, s3, s4, cd1, ca1, ca2)
```

DAA2 La regla DAA2 s'obté combinant els llocs geomètrics CC i RA. Veieu la Taula 4.4.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) ∩ punts(s2) = {p}
  ∧ punts(ca2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s3) − cd1 = ∅
  ∧ punts(s4) − cd1 = {p}
      on    ca1 = {s1, s2}
          ∧ ca2 = {s3, s4}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ca2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1)` = {`p, p4`}, `punts(s2)` = {`p, p5`}, `punts(s3)` = {`p2, p3`} i `punts(s1)` = {`p, p1`}. Aleshores la regla DAA2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAA2(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s3, s4, s1, s2, cd1, ca2, ca1)
```

DAA3 La regla DAA3 s'obté combinant els llocs geomètrics CC i CC. Veieu la Taula 4.4.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) ∩ punts(s2) = {p}
  ∧ punts(ca2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s3) ∩ punts(s4) = {p}
      on    ca1 = {s1, s2}
          ∧ ca2 = {s3, s4}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ca2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1)` = {`p, p1`}, `punts(s2)` = {`p, p2`}, `punts(s3)` = {`p, p3`} i `punts(s4)` = {`p, p4`}. Aleshores la regla DAA3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAA3(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, s4, cd1, ca1, ca2)
```

Configuració DAH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

$$
\begin{array}{l}
\texttt{e(D, A, H)} \ \wedge \ \texttt{cd1} \in \texttt{D} \ \wedge \ \texttt{ca1} \in \texttt{A} \ \wedge \ \texttt{ch1} \in \texttt{H} \ \wedge \ \mathcal{C} \rightarrow \\
\quad \texttt{e(} \\
\quad\quad (\texttt{D} - \{\texttt{cd1}\}) \cup \{\texttt{cd1} \cup \texttt{punts(ca1)} \cup \texttt{punts(ch1)}\}, \\
\quad\quad \texttt{A} - \{\texttt{ca1}\}, \\
\quad\quad \texttt{H} - \{\texttt{ch1}\} \\
\quad \texttt{)}
\end{array}
$$

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DAH1 La regla DAH1 s'obté combinant els llocs geomètrics RA i RP. Veieu la Taula 4.5.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{C} \equiv \texttt{punts(ca1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(s1)} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(s2)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(ch1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(seg(ch1))} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\quad\quad\quad \texttt{on ca1} = \{\texttt{s1, s2}\}
\end{array}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin $\texttt{punts(s1)} = \{\texttt{p1, p2}\}$, $\texttt{punts(s2)} = \{\texttt{p, p5}\}$, $\texttt{s3} = \texttt{seg(ch1)}$ i $\texttt{punts(s3)} = \{\texttt{p3, p4}\}$. Aleshores la regla DAH1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAH1(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1)
```

DAH2 La regla DAH2 s'obté combinant els llocs geomètrics CC i RP. Veieu la Taula 4.5.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{C} \equiv \texttt{punts(ca1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(s1)} \cap \texttt{punts(s2)} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(ch1)} - \texttt{cd1} = \{\texttt{p}\} \\
\quad \wedge \ \texttt{punts(seg(ch1))} - \texttt{cd1} = \emptyset \\
\quad\quad\quad \texttt{on ca1} = \{\texttt{s1, s2}\}
\end{array}
$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin $\texttt{punts(s1)} = \{\texttt{p, p3}\}$, $\texttt{punts(s2)} = \{\texttt{p, p4}\}$, $\texttt{s3} = \texttt{seg(ch1)}$ i $\texttt{punts(s3)} = \{\texttt{p1, p2}\}$. Aleshores la regla DAH2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAH2(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1)
```

DAH3 La regla DAH3 s'obté combinant els llocs geomètrics RA i RT. Veieu la Taula 4.5.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) − cd1 = ∅
  ∧ punts(s2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch1)) − cd1 = {p}
      on ca1 = {s1, s2}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1) = {p1, p2}`, `punts(s2) = {p, p5}`, `s3 = seg(ch1)` i `punts(s3) = {p3, p4}`. Aleshores la regla DAH3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAH3(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1)
```

DAH4 La regla DAH4 s'obté combinant els llocs geomètrics CC i RT. Veieu la Taula 4.5.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ca1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(s1) ∩ punts(s2) = {p}
  ∧ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch1)) − cd1 = {p}
      on ca1 = {s1, s2}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ca1` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `punts(s1) = {p, p3}`, `punts(s2) = {p, p4}`, `s3 = seg(ch1)` i `punts(s3) = {p1, p2}`. Aleshores la regla DAH4 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DAH4(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1)
```

Configuració DHH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ cd1 ∈ D ∧ {ch1, ch2} ⊆ H ∧ 𝒞 →
     e(
       (D − {cd1}) ∪ {cd1 ∪ punts(ch1) ∪ punts(ch2)},
       A,
       H − {ch1, ch2}
     )
```

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DHH1 La regla DHH1 s'obté combinant els llocs geomètrics RP i RP. Veieu la Taula 4.6.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
𝒞 ≡ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch1)) − cd1 = ∅
  ∧ punts(ch2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch2)) − cd1 = ∅
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ch1` i `ch2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `s1` = `seg(ch1)`, `punts(s1)` = {`p1, p2`}, `s2` = `seg(ch2)` i `punts(s2)` = {`p3, p4`}. Aleshores la regla DHH1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DHH1(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2)
```

DHH2 La regla DHH2 s'obté combinant els llocs geomètrics RP i RT. Veieu la Taula 4.6.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
𝒞 ≡ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch1)) − cd1 = ∅
  ∧ punts(ch2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch2)) − cd1 = {p}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ch1` i `ch2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `s1` = `seg(ch1)`, `punts(s1)` = {`p3, p4`}, `s2` = `seg(ch2)` i `punts(s2)` = {`p, p2`}. Aleshores la regla DHH2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DHH2(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2)
```

DHH3 La regla DHH3 s'obté combinant els llocs geomètrics RT i RT. Veieu la Taula 4.6.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ch1) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch1)) − cd1 = {p}
  ∧ punts(ch2) − cd1 = {p}
  ∧ punts(seg(ch2)) − cd1 = {p}
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `cd1`, `ch1` i `ch2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `s1` = `seg(ch1)`, `punts(s1)` = {`p, p3`}, `s2` = `seg(ch2)` i `punts(s2)` = {`p, p1`}. Aleshores la regla DHH3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
DHH3(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2)
```

Configuració AAH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ {ca1, ca2} ⊆ A ∧ ch1 ∈ H ∧ C →
     e(
       D ∪ {punts(ca1) ∪ punts(ca2) ∪ punts(ch1)},
       A − {ca1, ca2},
       H − {ch1}
     )
```

A continuació es descriu la única regla que té aquesta configuració.

AAH La regla AAH permet fusionar dos conjunts **CA** i un conjunt **CH** que comparteixen els mateixos punts. Veieu la Taula 4.7.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

```
C ≡ punts(ca1) = punts(ca2) = punts(ch1)
```

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `ca1`, `ca2` i `ch1` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `ca1` = {`s2, s3`}, `ca2` = {`s1, s2`}, `s2` = `seg(ch1)`, `p1 = punt(ch1)`, `punts(s1)` = {`p1, p2`}, `punts(s2)` = {`p2, p3`} i `punts(s3)` = {`p1, p3`}. Aleshores la regla AAH s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
AAH(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ca1, ca2, ch1)
```

Configuració AHH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

```
e(D, A, H) ∧ ca1 ∈ A ∧ {ch1, ch2} ⊆ H ∧ C →
     e(
       D ∪ {punts(ca1) ∪ punts(ch1) ∪ punts(ch2)},
       A − {ca1},
       H − {ch1, ch2}
     )
```

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

AHH1 La regla AHH1 permet fusionar un conjunt **CA** i dos conjunts **CH**. El punt compartit pels segments del conjunt **CA** no és cap dels punts dels conjunts **CH**. Veieu la Taula 4.8.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{punts(ca1)} = \texttt{punts(ch1)} = \texttt{punts(ch2)} \\ \wedge\ & \texttt{punts(s1)} \cap \texttt{punts(s2)} = \{\texttt{p3}\} \\ \wedge\ & \texttt{punt(ch1)} \neq \texttt{punt(ch2)} \neq \texttt{p3}\end{aligned}$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `ca1`, `ch1` i `ch2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `ca1` $=$ {`s1, s2`}, `s1` $=$ `seg(ch1)`, `p1 = punt(ch1)`, `s2` $=$ `seg(ch2)`, `p2 = punt(ch2)`, `punts(s1)` $=$ {`p2, p3`} i `punts(s2)` $=$ {`p1, p3`}. Aleshores la regla AHH1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
AHH1(cd, p1, p2, p3, s1, s2, ca1, ch1, ch2)
```

AHH2 La regla AHH2 permet fusionar un conjunt **CA** i dos conjunts **CH**. El punt compartit pels segments del conjunt **CA** coincideix amb el punt d'un dels conjunts **CH**. Veieu la Taula 4.8.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \equiv\ & \texttt{punts(ca1)} = \texttt{punts(ch1)} = \texttt{punts(ch2)} \\ \wedge\ & \texttt{punts(s1)} \cap \texttt{punts(s2)} = \texttt{punt(ch1)}\end{aligned}$$

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `ca1`, `ch1` i `ch2` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `ca1` $=$ {`s1, s3`}, `s1` $=$ `seg(ch1)`, `p1 = punt(ch1)`, `s2` $=$ `seg(ch2)`, `p2 = punt(ch2)`, `punts(s1)` $=$ {`p2, p3`}, `punts(s2)` $=$ {`p1, p3`} i `punts(s3)` $=$ {`p1, p2`}. Aleshores la regla AHH2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
AHH2(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ca1, ch1, ch2)
```

Configuració HHH

La regla genèrica per aquesta configuració és la següent.

$$
\begin{array}{l}
\texttt{e(D, A, H)} \ \wedge\ \texttt{\{ch1, ch2, ch3\}} \subseteq \texttt{H} \ \wedge\ \mathcal{C} \rightarrow \\
\quad \texttt{e(} \\
\quad\quad \texttt{D} \cup \texttt{\{punts(ch1)} \cup \texttt{punts(ch2)} \cup \texttt{punts(ch3)\},} \\
\quad\quad \texttt{A,} \\
\quad\quad \texttt{H} - \texttt{\{ch1, ch2, ch3\}} \\
\quad \texttt{)}
\end{array}
$$

A continuació es descriu la única regla que té aquesta configuració.

HHH La regla HHH permet fusionar tres conjunts **CH** que comparteixen els mateixos punts. Veieu la Taula 4.9.

Les condicions particulars $\mathcal{C}$ de la regla d'anàlisi són:

$\mathcal{C} \equiv$ `punts(ch1) = punts(ch2) = punts(ch3)`

Sigui `cd` un nou identificador pel conjunt **CD** creat per la regla. Siguin `ch1`, `ch2` i `ch3` els identificadors dels conjunts de restriccions implicats en la regla. Siguin `s1 = seg(ch1)`, `p1 = punt(ch1)`, `s2 = seg(ch2)`, `p2 = punt(ch2)`, `s3 = seg(ch3)`, `p3 = punt(ch3)`, `punts(s1) = {p2, p3}`, `punts(s2) = {p1, p3}` i `punts(s3) = {p1, p2}`. Aleshores la regla HHH s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
HHH(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ch1, ch2, ch3)
```

D.1.3 Regles de la fase de generació

En aquesta secció es descriuen les regles que intervenen en la fase de generació. Durant les fases de traducció i d'anàlisi s'ha enregistra la seqüència de regles que han estat aplicades tal i com es descriu per cada una de les regles. La fase de generació parteix d'aquestes seqüències per tal de generar la seqüència d'operacions geomètriques que li correspon, veieu la Figura 4.1. Per cada regla s'especifica el fragment de seqüència d'operacions geomètriques que produeix. S'han omès les transformacions geomètriques necessàries per posicionar respecte del conjunt **CD** de referència els punts dels altres conjunts **CD** implicats en les regles. També s'han omès les regles que produeixen subseqüències d'operacions geomètriques buides.

Traducció de restriccions sobre cercles i rectes

T4 La fase de generació produeix la seqüència d'operacions geomètriques que calcula la recta que passa pels dos punts.

```
T4(r, p1, p2) → r = recta2P(p1, p2)
```

Creació dels conjunts de restriccions elementals

C1 La fase de generació produeix la seqüència d'operacions geomètriques següent.

```
C1(ca, s1, s2, α) →
  s1.ca = 0
  s2.ca = α
```

C2 La fase de generació produeix la seqüència d'operacions geomètriques següent.

```
C2(cd, p1, p2, d) →
  p1.cd = puntXY(0, 0)
  p2.cd = puntXY(d, 0)
```

C3 La fase de generació produeix la seqüència d'operacions geomètriques següent.

```
C3(ch, p, s, h) →
  p.ch = puntXY(0, h)
  s.ch = recta2P(puntXY(0, 0), puntXY(1, 0))
```

Clausura transitiva de les restriccions d'angle

M La fase de generació produeix la seqüència d'operacions geomètriques següent.

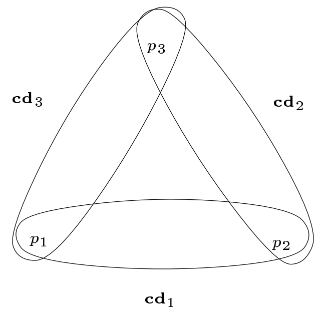
```
M(ca, s1, s2, s3, ca1, ca2) →
  s2.ca = 0
  s3.ca = (s3.ca2 - s1.ca2) - (s2.ca1 - s1.ca1)
```

Configuració DDD

Només hi ha una regla amb aquesta configuració.

DDD El punt lliure `p3` es calcula intersecant dos cercles amb centre i radi coneguts. Veieu la Taula D.1.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

Nom	*Figura*
DDD	

Taula D.1: Elements implicats en la regla de la configuració DDD.

```
DDD(cd, p1, p2, p3, cd1, cd2, cd3) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = icc(cercleCR(p1.cd1, dist(p1.cd3, p3.cd3)),
              cercleCR(p2.cd1, dist(p2.cd2, p3.cd2)))
```

Configuració DDA

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

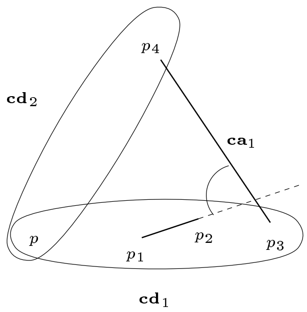
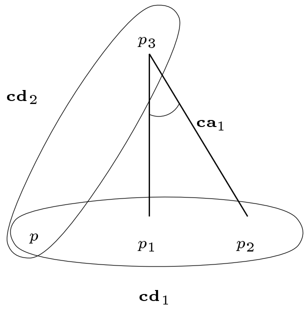
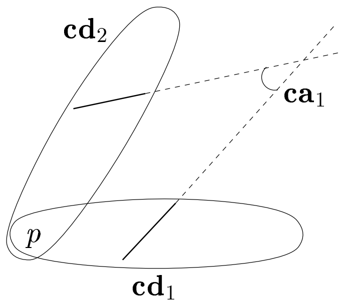
DDA1 El punt lliure `p4` es calcula intersecant un cercle amb centre i radi conegut i una recta determinada per un punt de pas i un angle respecte d'una altra recta. Veieu la Taula D.2.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DDA1(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, cd2, ca) →
  p.cd = p.cd1
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = irc(rectaAP(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                      s2.ca - s1.ca, p3.cd1),
              cercleCR(p.cd1, dist(p.cd2, p4.cd2)))
```

DDA2 El punt lliure `p3` es calcula intersecant un cercle determinat pel teorema de l'arc capaç amb un cercle determinat pel centre i el radi. Veieu la Taula D.2.

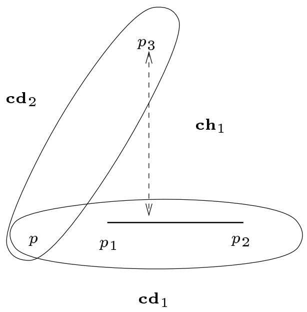
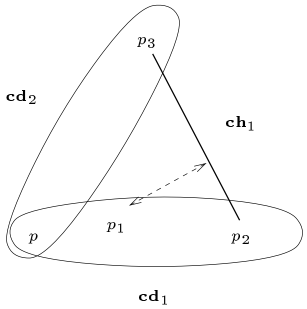
La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

Nom	*Figura*
DDA1	
DDA2	
DDA3	

Taula D.2: Elements implicats en les regles de la configuració DDA.

```
DDA2(cd, p, p1, p2, p3, s1, s2, cd1, cd2, ca) →
  p.cd = p.cd1
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = icc(cercleCR(p.cd1, dist(p.cd2, p3.cd2)),
             cercleAC(p1.cd1, p2.cd1, s2.ca - s1.ca))
```

DDA3 No cal calcular cap nou punt. A partir del fet que els conjunts **CD**, `cd1` i `cd2`, comparteixen un punt és possible calcular la matriu de translació per posicionar els punts de `cd2` respecte del sistema de coordenades de `cd1`. La restricció d'angle denotada pel conjunt **CA**, ca1, dóna la matriu de rotació. Veieu la Taula D.2.

Nom	*Figura*
DDH1	
DDH2	

Taula D.3: Elements implicats en les regles de la configuració DDH.

Configuració DDH

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

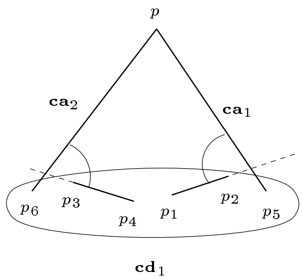
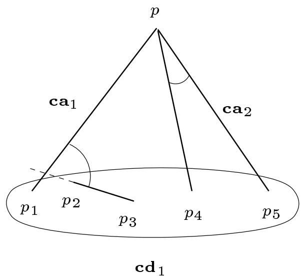
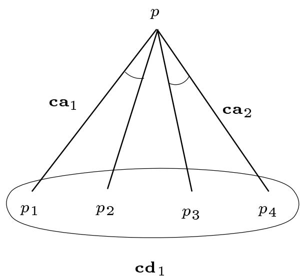
DDH1 El punt lliure `p3` es calcula intersecant un cercle amb centre i radi coneguts i una recta paral·lela a una altra a una distància determinada. Veieu la Taula D.3.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DDH1(cd, p, p1, p2, p3, s, cd1, cd2, ch) →
  p.cd = p.cd1
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = irc(rectaPlD(recta2P(p1.cd1, p2.cd1), ch),
              cercleCR(p.cd1, dist(p.cd2, p3.cd2)))
```

DDH2 El punt lliure `p3` es calcula intersecant un cercle amb centre i radi coneguts i una recta determinada per un punt de pas i que és tangent a un cercle donat. Veieu la Taula D.3.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Figura</th></tr>
<tr><td>DAA1</td><td></td></tr>
<tr><td>DAA2</td><td></td></tr>
<tr><td>DAA3</td><td></td></tr>
</table>

Taula D.4: Elements implicats en les regles de la configuració DAA.

```
DDH2(cd, p, p1, p2, p3, s, cd1, cd2, ch) →
  p.cd = p.cd1
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = irc(rectaTgCP(cercleCR(p1.cd1,
                             dist(p1.ch, s.ch), p2.cd1)),
              cercleCR(p.cd1, dist(p.cd2, p3.cd2)))
```

Configuració DAA

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DAA1 El punt lliure `p` és el punt d'intersecció de dues rectes determinades per un punt de pas i un angle respecte d'una altra recta. Veieu la Taula D.4.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAA1(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, p6, s1, s2, s3, s4,
     cd1, ca1, ca2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p5.cd = p5.cd1
  p6.cd = p6.cd1
  p.cd = irr(rectaAP(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                     s2.ca1 - s1.ca1, p5.cd1),
             rectaAP(recta2P(p3.cd1, p4.cd1),
                     s4.ca1 - s3.ca1, p6.cd1))
```

DAA2 El punt lliure p es calcula intersecant un cercle determinat pel teorema de l'arc capaç i una recta determinada per un punt de pas i l'angle respecte d'una altra recta. Veieu la Taula D.4.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAA2(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s1, s2, s3, s4,
     cd1, ca1, ca2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p5.cd = p5.cd1
  p.cd = irc(rectaAP(recta2P(p2.cd1, p3.cd1),
                     s2.ca1 - s1.ca1, p1.cd1),
             cercleAC(p4.cd1, p5.cd1, s4.ca2 - s3.ca2))
```

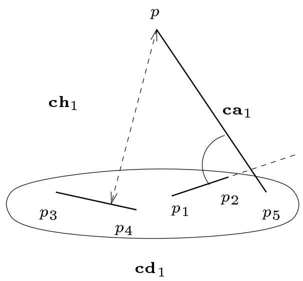
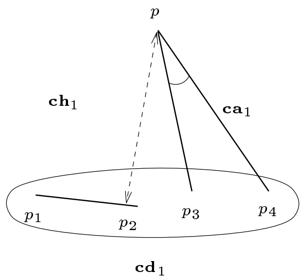
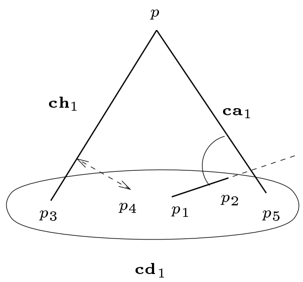
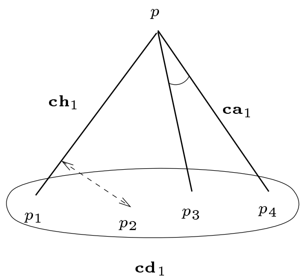
DAA3 El punt lliure p es calcula intersecant dos cercles definits pel teorema de l'arc capaç. Veieu la Taula D.4.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAA3(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, s4, cd1, ca1, ca2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p.cd = icc(cercleAC(p1.cd1, p2.cd1, s2.ca1 - s1.ca1),
             cercleAC(p3.cd1, p4.cd1, s4.ca2, s3.ca2))
```

Configuració DAH

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

Nom	*Figura*
DAH1	
DAH2	
DAH3	
DAH4	

Taula D.5: Elements implicats en les regles de la configuració DAH.

DAH1 El punt lliure p és el punt d'intersecció d'una recta determinada per un punt de pas i un angle respecte d'una altra recta amb una recta paral·lela a una altra a una distància determinada. Veieu la Taula D.5.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAH1(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p5.cd = p5.cd1
  p.cd = irr(rectaAP(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                     s2.ca1 - s1.ca1, p5.cd1),
             rectaPlD(recta2P(p3.cd1, p4.cd1),
                      dist(p.ch1, s3.ch1))),
```

DAH2 El punt lliure p es calcula intersecant un cercle determinat pel teorema de l'arc capaç i una recta paral·lela a una altra a una distància determinada. Veieu la Taula D.5.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAH2(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p.cd = irc(cercleAC(p3.cd1, p4.cd1, s3.ca1 - s2.ca1),
             rectaPlD(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                      dist(p.ch1, s1.ch1)))
```

DAH3 El punt lliure p és el punt d'intersecció de dues rectes: una ve determinada per un punt de pas i un angle respecte d'una altra recta i l'altra ve determinada per un punt de pas i tangent a un cercle donat. Veieu la Taula D.5.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAH3(cd, p, p1, p2, p3, p4, p5, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p5.cd = p5.cd1
  p.cd = irr(rectaAP(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                             s2.ca1 - s1.ca1, p5.cd1),
             rectaTgCP(cercleCR(p4.cd1,
```

```
                                dist(p4.ch1, s3.ch1)), p3.cd1))
```

DAH4 El punt lliure p es calcula intersecant un cercle determinat pel teorema de l'arc capaç i una recta determinada per un punt de pas i tangent a un cercle donat. Veieu la Taula D.5.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DAH4(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, s3, cd1, ca1, ch1) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p.cd = irc(rectaTgCP(p2.cd1, dist(p2.ch1, s1.ch1), p1.cd1),
             cercleAC(p3.cd1, p4.cd1, s3.ca1 - s2.ca1))
```

Configuració DHH

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

DHH1 El punt lliure p és el punt d'intersecció de dues rectes, cada una de les quals és paral·lela a una recta determinada a una distància determinada. Veieu la Taula D.6.

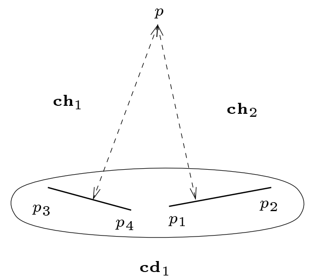
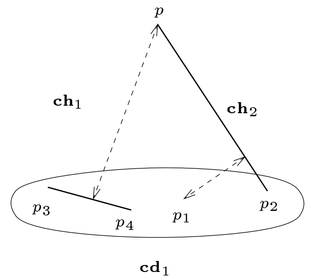
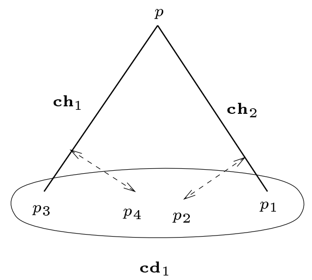
La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DHH1(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p.cd = irr(rectaPlD(recta2P(p1.cd1, p2.cd1),
                      dist(p.ch1, s1.ch1)),
             rectaPlD(recta2P(p3.cd1, p4.cd1),
                      dist(p.ch2, s2.ch2)))
```

DHH2 El punt lliure p és el punt d'intersecció d'una recta paral·lela a una altra recta a una distància donada amb una recta determinada per un punt de pas i tangent a un cercle. Veieu la Taula D.6.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DHH2(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
```

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Figura</th></tr>
<tr><td>DHH1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DHH2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>DHH3</td><td>
</td></tr>
</table>

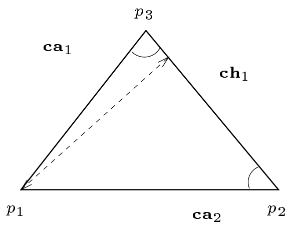
Taula D.6: Elements implicats en les regles de la configuració DHH.

```
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
  p.cd = irr(rectaTgCP(cercleCR(p1.cd1,
                    dist(p1.ch2, s2.ch2)), p2.cd1),
           rectaPlD(recta2P(p3.cd1, p4.cd1),
                   dist(p.ch1, s1.ch1)))
```

DHH3 El punt lliure `p` és el punt d'intersecció de dues rectes determinades per un punt de pas i tangents a un cercle donat. Veieu la Taula D.6.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
DHH3(cd, p, p1, p2, p3, p4, s1, s2, cd1, ch1, ch2) →
  p1.cd = p1.cd1
  p2.cd = p2.cd1
  p3.cd = p3.cd1
  p4.cd = p4.cd1
```

<table>
<tr><th>Nom</th><th>Figura</th></tr>
<tr><td>AAH</td><td>
</td></tr>
</table>

Taula D.7: Elements implicats en la regla de la configuració AAH.

```
p.cd = irr(rectaTgCP(cercleCR(p2.cd1,
                     dist(p2.ch2, s2.ch2)), p1.cd1),
           rectaTgCP(cercleCR(p4.cd1,
                     dist(p1.ch1, s1.ch1)), p3.cd1))
```

Configuració AAH

A continuació es descriu la regla que té aquesta configuració.

AAH Els tres punts es calculen segons la construcció presentada en [38]. Veieu la Taula D.7.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
AAH(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ca1, ca2, ch1) →
  p1.cd = puntXY(0, 0)
  p3.cd = irr(m, rectaPlD(l, dist(p1.ch1, s2.ch1)))
  p2.cd = irr(rectaAP(m, s1.ca2 - s2.ca2, p3.cd), l)
    on
      l = recta2P(p1.cd, puntXY(1, 0))
      m = rectaAP(l, s2.ca1 - s3.ca1, p1.cd)
```

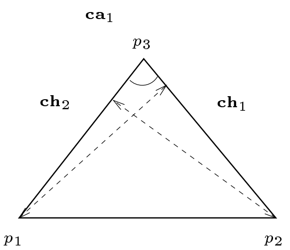
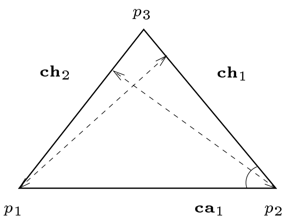
Configuració AHH

A continuació es descriuen les regles que tenen aquesta configuració.

AHH1 Els tres punts es calculen segons la construcció presentada en [38]. Veieu la Taula D.8.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
AHH1(cd, p1, p2, p3, s1, s2, ca1, ch1, ch2) →
  p3.cd = puntXY(0, 0)
```

Nom	*Figura*
AHH1	
AHH2	

Taula D.8: Elements implicats en les regles de la configuració AHH.

```
  p1.cd = irr(m, rectaPlD(l, dist(p1.ch1, s1.ch1)))
  p2.cd = irr(rectaPlD(m, dist(p2.ch2, s2.ch2)), l)
    on
      l = recta2P(p3.cd, puntXY(1, 0))
      m = rectaAP(l, s1.ca1 - s2.ca1, p3.cd)
```

AHH2 Els tres punts es calculen segons la construcció presentada en [38]. Veieu la Taula D.8.

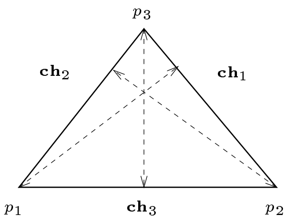
La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
AHH2(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ca1, ch1, ch2) →
  p2.cd = puntXY(0, 0)
  p1.cd = irr(m, rectaPlD(l, dist(p1.ch1, s1.ch1)))
  p3.cd = irr(rectaTgC(cercleCR(p2.cd,
                                dist(p2.ch2, s2.ch2)), m)
    on
      l = recta2P(p2.cd, puntXY(1, 0))
      m = rectaAP(l, s1.ca1 - s2.ca1, p2.cd)
```

Configuració HHH

A continuació es descriu la regla que té aquesta configuració.

HHH Els tres punts es calculen segons la construcció presentada en [38]. Veieu la Taula D.9.

Nom	*Figura*
HHH	

Taula D.9: Elements implicats en la regla de la configuració HHH.

La fase de generació produeix la seqüències d'operacions geomètriques següent.

```
HHH(cd, p1, p2, p3, s1, s2, s3, ch1, ch2, ch3) →
  p2.cd = pb
  p1.cd = irr(recta2P(pa, pb),
              rectaPlD(m, dist(p1.ch1, s1.ch1)))
  p3.cd = irr(rectaPlP(recta2P(pa, pc), p1.cd), m)
    on
      cercle3P: Punt, Punt, Punt → Cercle

      cercle3P(p, q, r) = cercleCR(c, dist(c, p))
        on
          c = irr(rectaB(p, q), rectaB(q, r))

      o = puntXY(0, 0)
      x = recta2P(o, puntXY(1, 0))
      l1 = rectaAP(x, π/4, o)
      l2 = x
      l3 = rectaAP(x, -π/4, o)
      p1 = irc(l1, cercleCR(o, dist(p1.ch1, s1.ch1)))
      p2 = irc(l2, cercleCR(o, dist(p2.ch2, s2.ch2)))
      p3 = irc(l3, cercleCR(o, dist(p3.ch3, s3.ch3)))
      c = cercle3P(p1, p2, p3)
      q1 = irc(l1, c) essent q1 ≠ p1
      q2 = irc(l2, c) essent q2 ≠ p2
      q3 = irc(l3, c) essent q3 ≠ p3
      pb = puntXY(0, 0)
      pc = puntXY(dist(o, q2), 0)
      pa = icc(cercleCR(pb, dist(o, q1)),
               cercleCR(pc, dist(o, q3)))
      m = recta2P(pb, pc)
```

D.2 Regles del mètode híbrid

A continuació es descriu el conjunt de regles del mètode híbrid. Cal tenir en compte que el mètode híbrid estén el mètode constructiu de manera que en aquesta secció es descriuen únicament les noves regles que aporta el mètode híbrid.

D.2.1 Regles de la fase de traducció

La fase de traducció parteix d'un problema geomètric definit en base a restriccions que ha estat expressat com un predicat el qual es transforma a una representació interna basada en conjunts de restriccions. Aquesta fase consta de dues parts. A la primera, les restriccions de tangència i coincidència sobre cercles amb radi desconegut es tradueixen a restriccions simbòliques de distància entre punts i distància perpendicular entre un punt i una recta. A la segona, les restriccions geomètriques simbòliques es representen en un graf bipartit.

La fase de traducció produeix també una seqüència on s'enregistren les regles de traducció que s'apliquen, veieu la Figura 4.1. Per cada regla de traducció s'especifica la informació que s'enregistra en aquesta seqüència. La fase de generació processarà la seqüència de regles de traducció per tal de generar una part de la seqüència d'operacions geomètriques associada al problema. Per les regles de traducció que tenen associada una subseqüència d'operacions geomètriques buida s'ha omès aquesta informació.

Traducció de restriccions sobre cercles i rectes

Les regles de traducció de restriccions sobre cercles amb desconegut i rectes a restriccions de distància entre punts i distància entre un punt i un segment són les següents:

R1 Les restriccions de coincidència es transformen a restriccions de distància respecte del centre del cercle igual a una variable dimensional que denota el radi. radi.

```
centre(c) = p ∧ sobre(q, c) →
  dist(p, q) = r ∧ radi(c) = r ∧ centre(c) = p
```

La regla R1 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
R1(c, p, r, q)
```

R2 Les restriccions de tangència entre cercles es transformen a restriccions de distància entre els centres. La distància entre els centres és una variable dimensional que es relaciona mitjançant una equació amb els radis dels cercle que també són variables dimensionals.

```
centre(c1) = p1 ∧
centre(c2) = p2 ∧ tg(c1, c2) →
  dist(p1, p2) = d ∧
```

```
  d = |r1 ± r2| ∧
  radi(c1) = r1 ∧ centre(c1) = p1 ∧
  radi(c2) = r2 ∧ centre(c2) = p2
```

La regla R2 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
R2(c1, p1, r1, c2, p2, r2, d)
```

R3 Les restriccions de tangència entre un cercle i una recta es transformen a restriccions de distància perpendicular entre el centre del cercle i la recta igual a la variable dimensional que denota el radi.

```
centre(c) = p ∧ tg(c, s) →
  dist(p, s) = r ∧ radi(c) = r ∧ centre(c) = p
```

La regla R3 s'enregistra a la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
R3(c, p, r, s)
```

Traducció de restriccions geomètriques simbòliques i equacions

Les restriccions geomètriques simbòliques i les equacions es representen mitjançant un graf bipartit tal i com es descriu al Capítol 6. El graf bipartit $B = (F, X, E)$ associat a un problema geomètric definit en base a restriccions es representa pel predicat `b`. Sigui `e` una equació, notarem per `vars(e)` al conjunt de variables que apareixen en `e` i per `equació(e)` al predicat s'avalua a cert si i només si `e` és una equació. Sigui `l` un element geomètric amb dos graus de llibertat, notarem per `gvars(l)` al conjunt de les dues variables geomètriques associades a `l`. Les regles de de traducció són següents.

E0 Creació del graf bipartit buit. Requereix que no existeixi el graf bipartit.

```
→ (∅, ∅, ∅)
```

E1 Representació d'una equació en el graf bipartit.

```
e ∧ equació(e) ∧ b(F, X, E) →
  b(
    F ∪ {e},
    X ∪ vars(e),
    E ∪ ({e} × vars(e))
  )
```

S1 Representació en el graf bipartit d'una restricció geomètrica simbòlica d'angle entre segments.

```
angle(r1, r2) = a ∧ b(F, X, E) →
  b(
    F ∪ {angle(r1, r2) = a},
    X ∪ ({a} ∪ gvars(r1) ∪ gvars(r2)),
    E ∪ ({angle(r1, r2) = a} × ({a} ∪ gvars(r1) ∪ gvars(r2))
  )
```

S2 Representació en el graf bipartit d'una restricció geomètrica simbòlica de distància entre punts.

```
dist(p1, p2) = d ∧ b(F, X, E) →
  b(
    F ∪ {dist(p1, p2) = d},
    X ∪ ({d} ∪ gvars(p1) ∪ gvars(p2)),
    E ∪ ({dist(p1, p2) = d} × ({d} ∪ gvars(p1) ∪ gvars(p2))
  )
```

S3 Representació en el graf bipartit d'una restricció geomètrica simbòlica de distància entre un punt i un segment.

```
dist(p, r) = d ∧ b(F, X, E) →
  b(
    F ∪ {dist(p, r) = d},
    X ∪ ({d} ∪ gvars(p) ∪ gvars(r)),
    E ∪ ({dist(p, r) = d} × ({d} ∪ gvars(p) ∪ gvars(r))
  )
```

D.2.2 Regla de la fase d'anàlisi

La fase d'anàlisi del mètode híbrid introdueix únicament una nova regla que descrivim tot seguit.

La fase d'anàlisi produeix també una seqüència on s'enregistren les regles d'anàlisi que s'apliquen, veieu la Figura 4.1. Per cada regla d'anàlisi s'especifica la informació que s'enregistra en aquesta seqüència. La fase de generació processarà la seqüència de regles d'anàlisi per tal de generar una part de la seqüència d'operacions geomètriques associada al problema. Per les regles d'anàlisi que tenen associada una subseqüència d'operacions geomètriques buida s'ha omès aquesta informació.

Sigui `b` un graf bipartit i `c` un conjunt **CD**. Notarem per `nul(b)` el predicat que s'avalua a cert si i només si `b` és un graf bipartit nul. Notarem per `restr(b, c)` el graf bipartit restringit pel conjunt `c`. Notarem per `dm(b)` la DM-descomposició de `b`. Sigui `o` = `dm(b)` l'ordre parcial resultant d'aplicar la DM-descomposició al graf bipartit `b`. Notarem per `minimal(o)`, `consistent(o)` i `maximal(o)` els grafs bipartits que representen el component minimal, el component consistent i el component maximal de la DM-descomposició de `b` respectivament. Notarem per `gelems(b)` els elements geomètrics que apareixen en el graf bipartit `b`. Notarem per `cds(o)`, `cas(o)` i `chs(o)` els conjunts **CD**, **CA** i **CH** respectivament provinents de les restriccions simbòliques del component maximal de la DM-descomposició que han estat valuades. Sigui `q` un conjunt de restriccions simbòliques. Notarem per `indeq(b, q)` el subgraf bipartitinduït pel conjunt d'equacions de `b` menys el conjunt `q`. Notarem per `valuades(o)` el conjunt de restriccions simbòliques del component maximal de la DM-descomposició que passen a ser valuades.

K Regla de càlcul.

```
e(D, A, H) ∧ b(F, X, E) ∧
C ∈ D ∧ R = dm(restr(b(F, X, E), C)) ∧ nul(minimal(R)) →
  C'= C ∪ gelems(consistent(R)) ∧
  e(
    (D − {C}) ∪ {C'} ∪ cds(R),
    A ∪ cas(R),
    H ∪ chs(R)
  ) ∧
  b(F', X', E') = indeq(maximal(R), valuades(R))
```

Sigui `equacions(b)` el conjunt d'equacions representades en el graf bipartit `b` i sigui `variables(b)` el conjunt de variables representades en el graf bipartit `b`. Aleshores la regla K s'enregistra en la seqüència de regles aplicades com segueix.

```
K(equacions(consistent(R)), variables(consistent(R)))
```

D.2.3 Regles de la fase de generació

En aquesta secció es descriuen les regles que intervenen en la fase de generació del mètode híbrid. Durant les fases de traducció i d'anàlisi s'ha enregistrat la seqüència de regles que han estat aplicades tal i com es descriu per cada una de les regles. La fase de generació parteix d'aquestes seqüències per tal de generar la seqüència d'operacions geomètriques que li correspon, veieu la Figura 4.1. Per cada regla s'especifica el fragment de seqüència d'operacions geomètriques que produeix. S'han omès les regles que produeixen subseqüències d'operacions geomètriques buides.

Traducció de restriccions sobre cercles i rectes

R1 El cercle es calcula a partir del centre i del radi un cop avaluada la variable dimensional que denota el radi.

```
R1(c, p, r, q) →
  c = cercleCR(p, r)
```

R2 Els cercles es calculen a partir dels respectius centres i del radis un cop avaluades les variables dimensionals que denoten els radis.

```
R2(c1, p1, r1, c2, p2, r2, d) →
  c1 = cercleCR(p1, r1)
  c2 = cercleCR(p2, r2)
```

R3 El cercle es calcula a partir del centre i del radi un cop avaluada la variable dimensional que denota el radi.

```
R1(c, p, r, s) →
  c = cercleCR(p, r)
```

Regla de la fase d'anàlisi

K Cal enregistrar a la seqüència d'operacions geomètriques la resolució del conjunt d'equacions `q` en les variables del conjunt `v`.

```
K(q, v) →
  resoldre(q, v)
```