3. Equivalència

En aquest capítol mirem temes relacionats amb quan les fórmules expressen la mateixa informació o condicions: l'*equivalència*. Veiem com demostrar la no equivalència a base de *interpretacions diferenciadores* (secció 3.1), i com demostrar l'equivalència a base d'equivalències basiques per a les connectives proposicionals (secció 3.2) i per als quantificadors (secció 3.3). A la secció 3.4 veiem *formes normals* i a la secció 3.5, *arbres de decisió binaris* i *diagrames de decisió binaris ordenats*, tots representacions estandarditzades de la informació que contenen les fórmules. A la secció 3.6 discutim la *formalització* del llenguatge ordenari en el llenguatge dels predicats.

(1) **Definició** (*equivalència*).

- Dues fórmules A i B són *equivalents* si i només si comparteixen el mateix valor en tota interpretació, la qual cosa escrivim $A \equiv B$;
- altrament, són *no equivalents*, la qual cosa escrivim $A \not\equiv B$.

(2) **Comentari**.

La relació d'equivalència entre fórmules és reflexiva, simètrica i transitiva, és a dir, és efectivament una relació d'equivalència.

(3) **Exemple**.

$A \to B \equiv \neg A \vee B$ perquè en tota interpretació

$[\![\neg A \vee B]\!] = [\![\neg A]\!] \cup [\![B]\!] = \overline{[\![A]\!]} \cup [\![B]\!] = [\![A \to B]\!]$.

Exercici 3.1. Demostreu que $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ (la llei de *contraposició*).

Solució. En tota interpretació
$[\![\neg B \to \neg A]\!] = \overline{[\![\neg B]\!]} \cup [\![\neg A]\!] = \overline{\overline{[\![B]\!]}} \cup \overline{[\![A]\!]} = [\![A]\!] \cup [\![B]\!] = [\![A \to B]\!]$.

---

(4) **Exemple**.

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Les subfórmules equivalents són intercanviables en el sentit següent:

(5) **Proposició** (*principi de reemplaçament*).

Sigui $C[A]$ una fórmula amb una subfórmula A distingida, i sigui $C[B]$ la fórmula que resulta de reemplaçar la subfórmula A per B.

Si $A \equiv B$ llavors $C[A] \equiv C[B]$.

3.1 Interpretacions diferenciadores

Per demostrar que dues fórmules *no* són equivalents, n'hi a prou de trobar una sola interpretació respecte la qual tinguin valors diferents: una *interpretació diferenciadora*.

(6) **Exemple**.

Considerem les fórmules $(P \to Q) \to R$ i $P \to (Q \to R)$ i una valuació $[P \mapsto \mathtt{0}, Q \mapsto \mathtt{1}, R \mapsto \mathtt{0}]$. La primera s'avalua de la manera següent:

$$[\![(\underbrace{P}_{\mathtt{0}} \to \underbrace{Q}_{\mathtt{1}}) \to \underbrace{R}_{\mathtt{0}}]\!]_{\mathtt{0}}$$

(Notem que el valor sencer és independent del valor de Q.) La segona s'avalua d'aquesta manera:

$$[\![\underbrace{P}_{\mathtt{0}} \to \underbrace{(Q \to R)}_{\mathtt{1}}]\!]_{\mathtt{1}}$$

(El valor no depèn del de $Q \to R$.) Veiem llavors que

$$(P \to Q) \to R \not\equiv P \to (Q \to R),$$

i que la implicació no és associativa.

Exercici 3.2. Avalueu els enunciats següents respecte a la interpretació de la forma $[P \mapsto \mathtt{1}, Q \mapsto \mathtt{0}]$.

i. $P \to Q$ i $Q \to P$
ii. $Q \to Q$ i Q
iii. $Q \to P$ i $\neg Q \to \neg P$

Solució.

i. $\mathtt{0}$ i $\mathtt{1}$
ii. $\mathtt{1}$ i $\mathtt{0}$
iii. $\mathtt{1}$ i $\mathtt{0}$

Veiem llavors que la implicació no és ni commutativa ni idempotent, i no és que $A \to B$ equivalgui en general a $\neg A \to \neg B$.

---

(7) **Exemple**.

Considerem les fórmules $\forall x(Px \to Q)$ i $\forall xPx \to Q$. Sigui una interpretació amb domini $\{\alpha, \beta\}$ de la forma $[P \mapsto \{\langle\alpha\rangle\}, Q \mapsto 0]$. Llavors:

$$[\![\forall x(Px \to Q)]\!] = [\![\underbrace{\underbrace{(\underbrace{Pa}_{0} \to Q)}_{0} \wedge (Pb \to Q)}_{0}]\!]$$

$$[\![\forall xPx \to Q]\!] = [\![\underbrace{\underbrace{Pa \wedge Pb}_{0} \to Q}_{1}]\!]$$

Veiem que no és que $\forall x(A \to B)$ equivalgui en general a $\forall xA \to B$, tot i que x no sigui lliure a B.

Exercici 3.3. Avalueu els enunciats següents respecte a la mateixa interpretació:
i. $[\![\exists x(Px \to Q)]\!]$ ii. $[\![\exists xPx \to Q]\!]$

Solució. i) 1, ii) 0. Veiem que tampoc no és que $\exists x(A \to B)$ equivalgui en general a $\exists xA \to B$, tot i que x no sigui lliure a B.

Exercici 3.4. Avalueu els enunciats següents respecte a la interpretació amb domini $\{\alpha, \beta\}$ de la forma $[P \mapsto \{\langle\alpha\rangle\}, Q \mapsto \{\langle\beta\rangle\}]$:
i. $[\![\exists xPx \wedge \exists xQx]\!]$ ii. $[\![\exists x(Px \wedge Qx)]\!]$
iii. $[\![\forall xPx \vee \forall xQx]\!]$ iv. $[\![\forall x(Px \vee Qx)]\!]$

Solució. i) 1, ii) 0, iii) 0, iv) 1. Veiem la no-distributivitat de $\exists$ sobre $\wedge$ i la no-distibutivitat de $\forall$ sobre $\vee$.

Exercici 3.5. Avalueu els enunciats següents respecte a la mateixa interpretació:
i. $[\![\forall x \forall x (Px \vee Qx)]\!]$
ii. $[\![\forall x (\forall x Px \vee Qx)]\!]$

Solució. i) `1`, ii) `0`.

Tot i poder demostrar la *no-equivalència* d'aquesta manera, com que hi ha un nombre infinit d'interpretacions, no podem demostrar l'*equivalència* per comprovar-les totes. El que farem és donar unes equivalències bàsiques que seran suficients per derivar qualsevol equivalència.

3.2 Connectives proposicionals

Les lleies bàsiques d'equivalència proposicional són les següents:

(8) **Proposició** (*lleis d'equivalència per a les connectives proposicionals*).

$$
\begin{array}{rcll}
A \wedge (B \wedge C) & \equiv & (A \wedge B) \wedge C & \text{associativitat de } \wedge \\
A \vee (B \vee C) & \equiv & (A \vee B) \vee C & \text{associativitat de } \vee \\
A \wedge B & \equiv & B \wedge A & \text{commutativitat de } \wedge \\
A \vee B & \equiv & B \vee A & \text{commutativitat de } \vee \\
A \wedge A & \equiv & A & \text{idempotència de } \wedge \\
A \vee A & \equiv & A & \text{idempotència de } \vee \\
 & & & \\
\neg\neg A & \equiv & A & \text{involució de } \neg \\
 & & & \\
A \wedge (B \vee A) & \equiv & A & \text{absorció} \\
A \vee (B \wedge A) & \equiv & A & \text{absorció} \\
 & & & \\
A \wedge (B \vee C) & \equiv & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & \text{distribució de } \wedge \text{ sobre } \vee \\
A \vee (B \wedge C) & \equiv & (A \vee B) \wedge (A \vee C) & \text{distribució de } \vee \text{ sobre } \wedge \\
 & & & \\
\neg(A \wedge B) & \equiv & \neg A \vee \neg B & \text{De Morgan} \\
\neg(A \vee B) & \equiv & \neg A \wedge \neg B & \text{De Morgan} \\
 & & & \\
A \wedge \neg A & \equiv & \square & \text{complementarietat} \\
A \vee \neg A & \equiv & \blacksquare & \text{complementarietat} \\
 & & & \\
A \wedge \blacksquare & \equiv & A & \\
A \wedge \square & \equiv & \square & \\
A \vee \blacksquare & \equiv & \blacksquare & \\
A \vee \square & \equiv & A & \\
 & & & \\
\neg\square & \equiv & \blacksquare & \\
\neg\blacksquare & \equiv & \square &
\end{array}
$$

(9) **Comentari**.

- Les lleis de complementarietat signifiquen que $\blacksquare$ i $\square$ es podrien definir:
  - $\blacksquare =_{df} P \vee \neg P$
  - $\square =_{df} P \wedge \neg P$
- De la mateixa manera, la conjunció i la disjunció es podrien definir una en termes de l'altra:
  - $A \wedge B =_{df} \neg(\neg A \vee \neg B)$
  - $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Exercici 3.6. Demostreu les equivalències de (8).

Solució. En tota interpretació
$[\![A \wedge (B \wedge C)]\!] = [\![A]\!] \cap ([\![B]\!] \cap [\![C]\!]) = ([\![A]\!] \cap [\![B)]\!] \cap [\![C]\!] = [\![(A \wedge B) \wedge C]\!]$, per l'associativitat de la intersecció, etc.

3.3 Quantificadors

Les lleies bàsiques d'equivalència per als quantificadors són les següents:

(10) **Proposició** (*lleis d'equivalència per als quantificadors*).

$\mathtt{Q}xA$	$\equiv$	$\mathtt{Q}y(A\{y/x\})$	si $A\{y/x\}$ és lliure i y no és lliure a A conversió-α
$\neg\exists xA$	$\equiv$	$\forall x\neg A$	De Morgan
$\neg\forall xA$	$\equiv$	$\exists x\neg A$	De Morgan
$\exists xA \vee \exists xB$	$\equiv$	$\exists x(A \vee B)$	distribució de $\exists$ sobre $\vee$
$\forall xA \wedge \forall xB$	$\equiv$	$\forall x(A \wedge B)$	distribució de $\forall$ sobre $\wedge$
$\mathtt{Q}xA \wedge B$	$\equiv$	$\mathtt{Q}x(A \wedge B)$	si x no és lliure a B
$\mathtt{Q}xA \vee B$	$\equiv$	$\mathtt{Q}x(A \vee B)$	si x no és lliure a B
$\mathtt{Q}xA \to B$	$\equiv$	$\overline{\mathtt{Q}}x(A \to B)^a$	si x no és lliure a B
$A + \mathtt{Q}xB$	$\equiv$	$\mathtt{Q}x(A + B)^b$	si x no és lliure a A
$\mathtt{Q}xA$	$\equiv$	A	si $\mathtt{Q}x$ és una *quantificació vàcua*, és a dir, x no és lliure a A

[a] $\overline{\forall} = \exists$ i $\overline{\exists} = \forall$

[b] $+$ és $\wedge$, $\vee$ o $\to$

(11) **Comentari**.

- La conversió-α formalitza el fet que es poden canviar els noms de les variables lligades, sempre que es conservin les relacions de lligament.

- $\forall x\exists y Dxy \not\equiv \forall y\exists y Dyy$ i $\exists x Dxy \not\equiv \exists y Dyy$ (ambdós tenen la interpretació diferenciadora $(\{\alpha,\beta\}, [D \mapsto \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}])$.
  - La conversió-α *no* relaciona $\forall x\exists y Dxy$ i $\forall y\exists y Dyy$ perquè $\exists y Dxy\{y/x\}$ *no* és lliure.
  - I la conversió-α *no* relaciona $\exists x Dxy$ i $\exists y Dyy$ perquè y és lliure a Dxy.

(12) **Comentari**.

Els quantificadors universal i existencial es podrien definir un en termes de l'altre:

$\mathtt{Q}xA \equiv \neg\overline{\mathtt{Q}}x\neg A$.

Exercici 3.7. Demostreu les equivalències de (10).

Solució. Per a la primera llei de De Morgan: en tota interpretació $[\![\neg\exists xA]\!]^g = \overline{[\![\exists xA]\!]^g} = \overline{\bigcup_{d\in D}[\![A]\!]^{g[x:=d]}} = = \bigcap_{d\in D}\overline{[\![A]\!]^{g[x:=d]}} = \bigcap_{d\in D}[\![\neg A]\!]^{g[x:=d]} = [\![\forall x\neg A]\!]^g$, etc.

3.4 Formes normals

L'equivalència $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B)\wedge(B \to A)$ significa que qualsevol fórmula té un equivalent sense la implicació dobla: per obtenir-lo simplement reemplacem cada subfórmula $A \leftrightarrow B$ per $(A \to B)\wedge(B \to A)$. I l'equivalència

$A \to B \equiv \neg A \vee B$ significa que qualsevol fórmula té un equivalent sense la implicació: per obtenir-lo simplement reemplacem cada subfórmula $A \to B$ per $\neg A \vee B$. Les altres connectives proposicionals tenen un comportament sota les equivalències donat per la seva interpretació conjuntista: $\Box$ com el conjunt buit, $\blacksquare$ com el conjunt universal, $\neg$ com l'operació que dóna el conjunt complementari, i $\wedge$ i $\vee$ com intersecció i reunió: $A \equiv B$ ssi $A = B$ en àlgebra Booleana. Aquest fet ens permet pensar en termes familiars de l'àlgebra de Boole per simplificar les fórmules. Per exemple, podem fer la següent simplificació, ometent parèntesis en virtut de l'associativitat i fent servir lleis com ara la de la idempotència, la de la complementarietat i la de l'absorció:

$$\begin{array}{lrcl} (13) & (A \to \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) & \equiv & (\neg A \vee \neg A) \wedge \blacksquare \wedge (B \vee \neg A) \\ & & \equiv & \neg A \wedge (B \vee \neg A) \\ & & \equiv & \neg A \end{array}$$

La idea en què es basen les formes normals consisteix a tenir una norma per a la simplificació i l'estandardització de les representacions, de tal manera que, fins a cert punt, les fórmules que són equivalents tinguin formes normals semblants o iguals.

(14) **Definició** (*forma normal de negació*).

Una fórmula està en *forma normal de negació* (FNN) si i només si

- no té implicacions
- i no té cap connectiva dintre una negació,

és a dir, tota negació està immediatament davant d'un àtom.

Per convertir qualsevol fórmula en un equivalent en FNN n'hi ha prou amb les lleis següents, que s'apliquen cap a la dreta.

(15) a.
$$\begin{aligned} A \to B &\equiv \neg A \vee B \\ A \leftrightarrow B &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} \neg\blacksquare &\equiv \square \\ \neg\square &\equiv \blacksquare \\ \neg\neg A &\equiv A \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} \neg\exists x A &\equiv \forall x \neg A \\ \neg\forall x A &\equiv \exists x \neg A \end{aligned}$$

(16) **Definició** (*forma normal conjuntiva*).

Una fórmula proposicional està en *forma normal conjuntiva* (FNC) si i només si

- és una FNN
- i no té cap conjunció dintre una disjunció.

Per convertir qualsevol fórmula proposicional en FNC són suficients les lleis (15a, b) més (17).

(17)
$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ (B \wedge C) \vee A &\equiv (B \vee A) \wedge (C \vee A) \end{aligned}$$

(18) **Definició** (*forma normal disjuntiva*).

Una fórmula proposicional està en *forma normal disjuntiva* (FND) si i només si

- és una FNN
- i no té cap disjunció dintre una conjunció.

Per convertir qualsevol fórmula en FND són suficients les lleis (15a, b) més (19).

(19) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(B \vee C) \wedge A \equiv (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$

(20) **Exemple**.

Conversió en forma normal conjuntiva i disjuntiva:

$$\begin{array}{lcll} P \vee \neg Q \to R & \equiv & \neg(P \vee \neg Q) \vee R & \\ & \equiv & (\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R & \\ & \equiv & (\neg P \wedge Q) \vee R & \text{FND} \\ & \equiv & (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) & \text{FNC} \end{array}$$

(21) **Exemple**.

A vegades es poden obtenir formes normals més simplificades en virtut d'altres lleis d'equivalència per a les connectives proposicionals; així:

$$\begin{array}{lcll} \neg P \to \neg(\neg Q \vee P) & \equiv & P \vee \neg(\neg Q \vee P) & \\ & \equiv & P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P) & \\ & \equiv & P \vee (Q \wedge \neg P) & \text{(FND)} \\ & \equiv & (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) & \text{(FNC)} \\ & \equiv & (P \vee Q) \wedge \blacksquare & \text{(FNC)} \\ & \equiv & P \vee Q & \text{FNC, FND} \end{array}$$

Exercici 3.8. Normalitzeu $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge P$.

Solució. $P \wedge Q \wedge R$.

---

(22) **Exemple**.

Demostració d'equivalència per conversió en la mateixa FNC:

$$\begin{array}{rcll} (P \to Q) \wedge (P \to R) & \equiv & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) & \text{FNC} \\ \\ P \to Q \wedge R & \equiv & \neg P \vee (Q \wedge R) & \text{FND} \\ & \equiv & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) & \text{FNC} \end{array}$$

(23) **Definició** (*forma normal prenexa*).

Una fórmula està en *forma normal prenexa* (FNP) si i només si

no té cap quantificador dintre una connectiva proposicional;

és a dir, si té la forma:

$$\underbrace{\mathtt{Q}x_1 \ldots \mathtt{Q}x_n}_{\substack{\text{el prefix} \\ n \geq 0 \\ \text{quantificadors}}} \qquad \underbrace{A}_{\substack{\text{la matriu} \\ \text{sense} \\ \text{quantificadors}}}$$

Per convertir qualsevol fórmula en FNP n'hi ha prou amb les lleis (15c) més les de (24).

(24)
$$\begin{array}{rcll} \mathtt{Q}xA & \equiv & \mathtt{Q}y(A\{y/x\}) & \text{si } A\{y/x\} \text{ és lliure i } y \text{ no és lliure a } A \\ \mathtt{Q}xA \wedge B & \equiv & \mathtt{Q}x(A \wedge B) & \text{si } x \text{ no és lliure a } B \\ \mathtt{Q}xA \vee B & \equiv & \mathtt{Q}x(A \vee B) & \text{si } x \text{ no és lliure a } B \\ \mathtt{Q}xA \to B & \equiv & \overline{\mathtt{Q}}x(A \to B) & \text{si } x \text{ no és lliure a } B \\ A + \mathtt{Q}xB & \equiv & \mathtt{Q}x(A + B) & \text{si } x \text{ no és lliure a } A \end{array}$$

(25) **Definició** (*forma normal prenexa conjuntiva*).

Una fórmula està en *forma normal prenexa conjuntiva* (FNPC) si i només si

és una FNP amb matriu en FNC.

(26) **Definició** (*forma normal prenexa disjuntiva*).

Una fórmula està en *forma normal prenexa disjuntiva* (FNPD) si i només si

és una FNP amb matriu en FND.

(27) **Exemple**.

Conversió en FNP:

$$\begin{array}{lcll} \exists x Fx \to \forall x Gx & \equiv & \forall x(Fx \to \forall x Gx) & \\ & \equiv & \forall x(Fx \to \forall y Gy) & \\ & \equiv & \forall x \forall y(Fx \to Gy) & \text{FNP} \\ & \equiv & \forall x \forall y(\neg Fx \vee Gy) & \text{FNPC, FNPD} \end{array}$$

(28) **Exemple**.

A vegades es poden obtenir formes normals prenexes simplificades en virtut d'altres lleis de primer ordre; per exemple:

$$\begin{array}{lll} \forall x \exists y(\neg Pxy \wedge Qx) \to \exists x \neg(\forall y Ryx \to Qx) & & \\ \quad \equiv \quad \neg \forall x \exists y(\neg Pxy \wedge Qx) \vee \exists x \neg(\neg \forall y Ryx \vee Qx) & & \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y(Pxy \vee \neg Qx) \vee \exists x(\forall y Ryx \wedge \neg Qx) & \text{FNN, distr.} \\ \quad \equiv \quad \exists x(\forall y(Pxy \vee \neg Qx) \vee (\forall y Ryx \wedge \neg Qx)) & \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y((Pxy \vee \neg Qx) \vee \forall y(Ryx \wedge \neg Qx)) & \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y((Pxy \vee \neg Qx) \vee \forall z(Rzx \wedge \neg Qx)) & \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y \forall z((Pxy \vee \neg Qx) \vee (Rzx \wedge \neg Qx)) & \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y \forall z(Pxy \vee (\neg Qx \vee (Rzx \wedge \neg Qx))) & \text{abs.} \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y \forall z(Pxy \vee \neg Qx) & \text{quant. vàc.} \\ \quad \equiv \quad \exists x \forall y(Pxy \vee \neg Qx) & \text{FNPC, FNPD} \end{array}$$

(29) **Exemple**.

Demostració d'equivalència per conversió en la mateixa FNPC:

$$\begin{aligned}
&\forall z(Rzz \vee \exists z(Qxz \wedge \neg Pzy)) \\
&\quad \equiv \quad \forall z(Rzz \vee \exists w(Qxw \wedge \neg Pwy)) \\
&\quad \equiv \quad \forall z \exists w(Rzz \vee (Qxw \wedge \neg Pwy)) \\
&\quad \equiv \quad \forall z \exists w((Rzz \vee Qxw) \wedge (Rzz \vee \neg Pwy))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall x Rxx \vee \neg \forall w(\neg Pwy \rightarrow \neg Qxw) \\
&\quad \equiv \quad \forall x Rxx \vee \neg \forall w(Pwy \vee \neg Qxw) \\
&\quad \equiv \quad \forall x Rxx \vee \exists w(\neg Pwy \wedge Qxw) \\
&\quad \equiv \quad \forall z(Rzz \vee \exists w(\neg Pwy \wedge Qxw)) \\
&\quad \equiv \quad \forall z \exists w(Rzz \vee (\neg Pwy \wedge Qxw)) \\
&\quad \equiv \quad \forall z \exists w((Rzz \vee Qxw) \wedge (Rzz \vee \neg Pwy))
\end{aligned}$$

Però, com que les formes normals no són úniques, no sempre és immediatament evident si dues fórmules són equivalents mirant els resultats de la conversió en forma normal.

3.5 Arbres de decisió binaris i OBDDs[1]

Una *variable booleana* és una variable que pren valors en el conjunt $\{0, 1\}$. Una *funció booleana* sobre les variables booleanes $x_1, \ldots, x_n$ és una operació n-ària sobre $\{0, 1\}$. Una funció booleana es pot representar per la seva taula veritativa, per exemple una funció booleana ternària f es representa de la

[1] Aquesta secció es deriva d'uns apunts de Lluís Vila i Juan Luis Esteban.

forma següent:

(30)

P	Q	R	$f(P,Q,R)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Qualsevol fórmula proposicional representa una funció booleana dels valors dels seus àtoms, considerades com a variables booleanes, al valor de la fórmula sencera corresponent. Per exemple, la fórmula $((Q \to P) \to P) \wedge R$ representa la funció booleana f.

Exercici 3.9. Comproveu que $((Q \to P) \to P) \wedge R$ representa f.

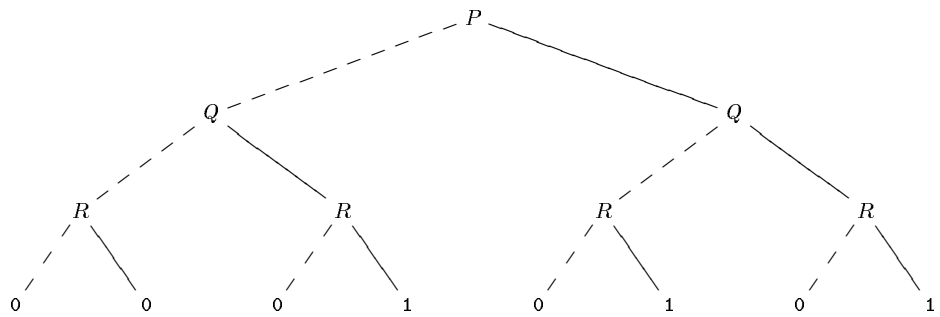
Tota funció booleana és representada per alguna fórmula proposicional (d'això se'n diu la *completesa funcional*): podem llegir d'una taula veritativa una FND corresponent amb disjuntands per totes i només les línea que dónen cert, per exemple de (30) obtenim:

(31) $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$
$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee$
$(P \wedge Q \wedge R)$

La funció booleana representada per una fórmula proposicional es pot representar, a més de per la seva taula veritativa, per un *arbre de decisió binari*. L'arbre de decisió binari *complet* per a la funció booleana f representada per

$((Q \to P) \to P) \wedge R$ és:

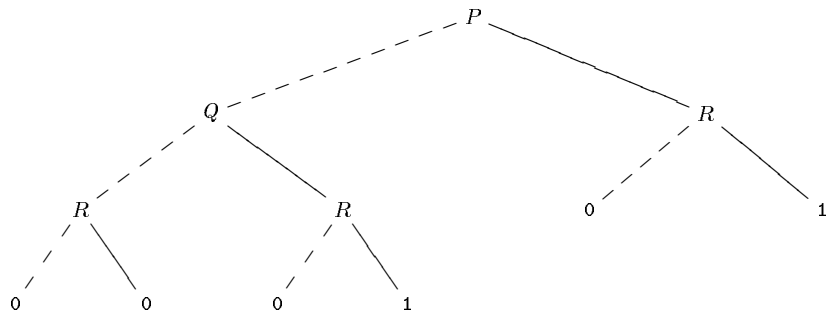
(32)



Veiem que cada node intern està etiquetat amb una variable i està connectat a una filla per una arresta discontínua i a una filla per una arresta contínua; aquestes representen els casos en què la variable sigui `0` i `1` respectivament. Així cada branca d'un arbre de decisió representa valors per a les seves variables; a la fulla hi ha el valor corresponent de la funció booleana.

En un arbre de decisió binari complet especifiquem valors explícitament per a tota variable, però en cas que algun valor de la sortida sigui indiferent a una variable, podem ometre el node de la variable donant un arbre de decisió binari més compacte (no complet); així per al nostre exemple podríem tenir:

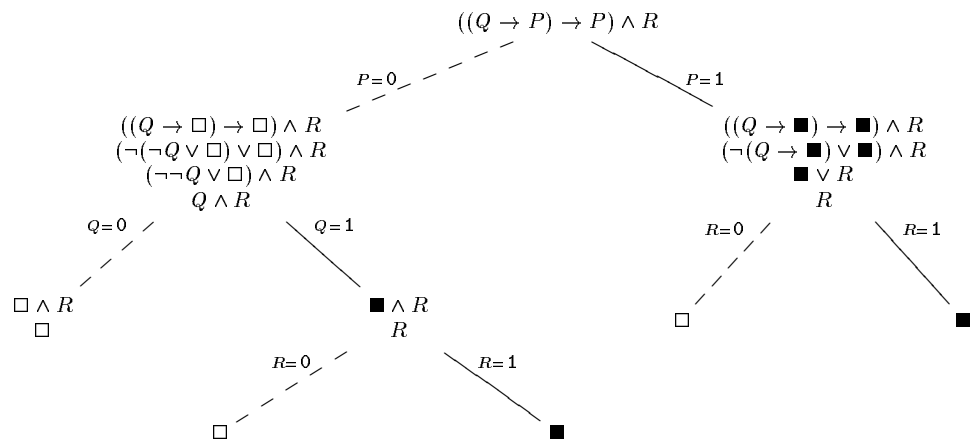
(33)



Per a calcular un arbre de decisió binari per a una fórmula proposicional donada hi ha el següent *algoritme de Quine*. Comencem amb l'arrel etiquetada per la fórmula donada. Aleshores citem una variable i generem la filla discontínua substituint la variable per □ i simplificant, i generem la filla contínua substituint la variable per ■ i simplificant. Després citem una

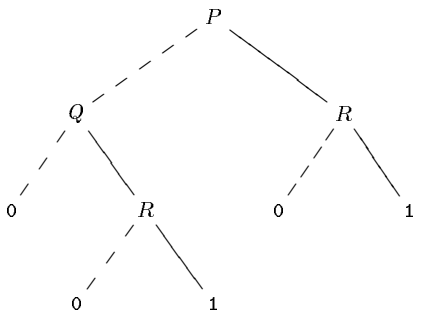
variable en aquestes filles, etc., fins arribar a fulles □ o ■. Per exemple:

(34)



Això ens dóna l'arbre de decisió binari següent:

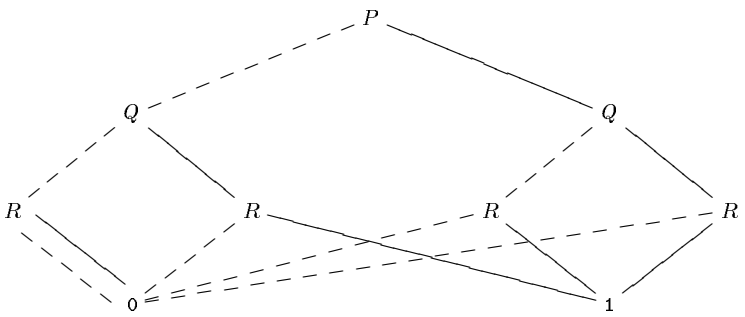
(35)



En *diagrames de decisió binaris ordenats* (OBDDs, de l'anglès *Ordered Binary Decision Diagrams*) permetem que els nodes comparteixin descendents (és a dir anem des d'arbres a grafs dirigits acíclics). Sigui un ordre entre les variables, per exemple l'ordre alfabètic; llavors un arbre de decisió binari és *ordenat* si i només si tot node precedeix els seus descendents en l'ordre. Per exemple, podem veure que els arbres de decisió binàris (32), (33) i (35) tots segueixen l'ordre $P < Q < R$. Per a obtenir un diagrama de decisió binari ordenat inicial partint d'un arbre de decisió binari ordenat, simplement identifiquem totes les fulles □ i totes les fulles ■ en dos nodes terminals etiquetats amb `0` i `1`. Per exemple, de l'arbre de decisió binari ordenat (complet) (32) obtenim el diagrama de decisió binari ordenat inicial

següent:

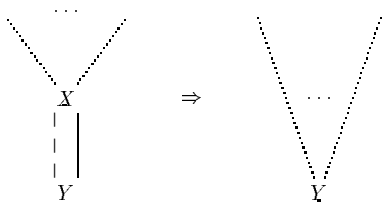
(36)



Definim reduccions sobre diagrames de decisió binaris ordenats que conserven la funció booleana codificada:

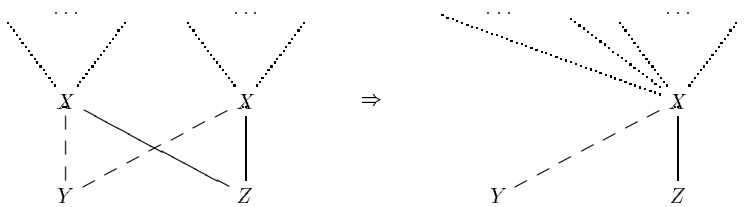
(37) **Definició** (*eliminació de nodes redundants d'un OBDD*).

Si els dos descendents d'un node són el mateix, llavors s'elimina el node mare i es redirigeixen totes les arestes que hi arribaven cap al descendent compartit:



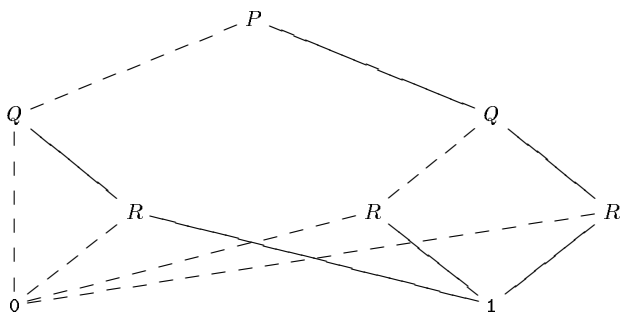
(38) **Definició** (*eliminació de nodes duplicats d'un OBDD*).

Si dos nodes de la mateixa variable comparteixen els mateixos descendents discontínus i contínus llavors s'elimina un dels nodes i es redirigeixen totes les arestes que hi arribaven cap a l'altre:



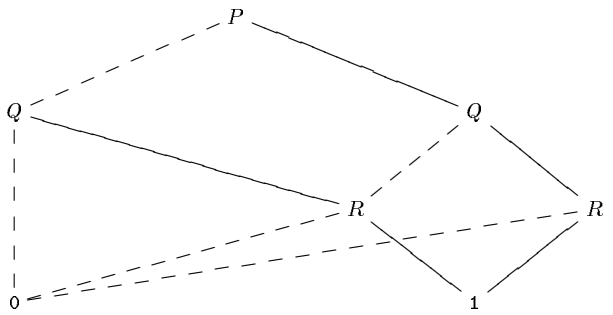
Per reduir un OBDD apliquem les reduccions iterativament en qualsevol ordre. Quan no se'n pot aplicar cap més, es té un OBDD *reduït*. Per exemple, l'OBDD (36) es pot reduir per eliminació d'un node redundant a:

(39)



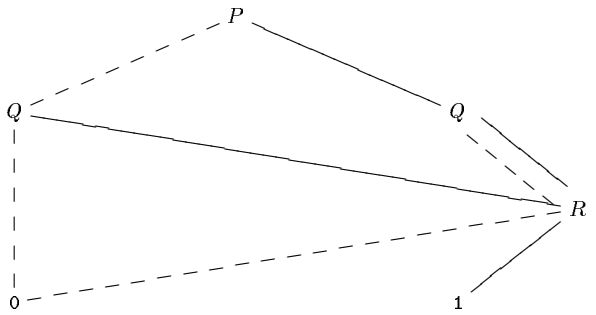
que es pot reduir per eliminació de nodes duplicats a:

(40)



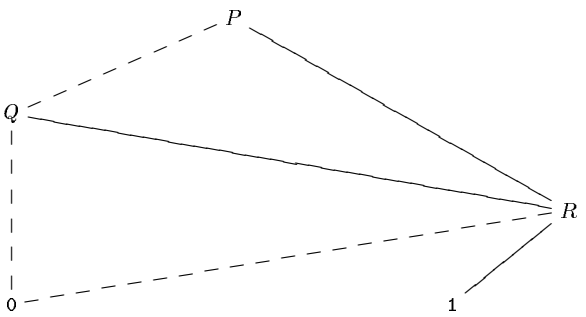
que es pot reduir per eliminació de nodes duplicats a:

(41)



que es pot reduir per eliminació d'un node redundant a:

(42)



Els OBDDs reduïts, a diferència de les formes normals, són *canònics*; és a dir, dues fórmules proposicionals són equivalents si i només si els seus OBDDs reduïts són idèntics. Desafortunadament els OBDDs no s'estenen als quantificadors.

3.6 Formalització

Per *formalització* volem dir la representació en el llenguatge de la lògica del llenguatge ordinari, conservant les situacions en les quals les frases i els enunciats són certs i falsos. És una pràctica entremig de la paràfrasi i la traducció.

Comencem amb un exemple molt simple:

(43) Plou i fa sol.

P plou
S fa sol

$P \wedge S$

Representem les frases bàsiques 'plou' i 'fa sol' per les lletres proposicionals P i Q. En general, quan fem formalitzacions sempre és adient donar una taula indicant el vocabulari usat i el que tradueix; d'aquesta taula en diem una *clau*. Segons la clau donada, la frase 'plou i fa sol' es formalitza $P \wedge S$. No gaire més complicat:

(44) Plou i no fa sol.

$P \wedge \neg S$

Considereu, però, la frase (45).

(45) No plou i fa sol.

$\neg P \wedge S$
$\neg(P \wedge S)$

La frase es pot entendre en dues maneres: com a 'no plou, i fa sol' o com a 'No és el cas que (plou i fa sol)'. Diem que la frase és *ambigua*. El llenguatge natural és altament ambigu, però ho notem poc sovint perquè normalment encertem la interpretació desitjada pel context sense ser conscients de l'ambiguïtat. Quan es fa formalització l'ambiguïtat s'hauria de detectar i s'hauria de donar les diferents formalitzacions.

Les frases solen ser analitzades en 'subjecte' i 'predicat':

(46) El Joan camina.

j	el Joan	Cj
Cx	x camina	

Notem com posem en la clau una constant pel nom propi 'el Joan' i una variable amb la lletra de predicat per a 'camina' per a indicar què tradueix. El 'predicat' d'una frase, a més de ser un verb intransitiu com 'camina', pot ser un verb transitiu amb el seu 'objecte':

(47) El Joan estima la Maria.

m	la Maria	Emj
Eyx	x estima y	

Aquí és important respectar l'ordre dels paràmetres de la lletra de predicat indicada en la clau; aquest és arbitrari, però una vegada triada s'ha de recordar què és: Emj no és el mateix que Ejm, que vol dir 'La Maria estima el Joan' segons la nostra clau. La frase (47) en veu activa té la paràfrasi (48) en veu passiva:

(48) La Maria és estimada pel Joan.

Emj

Un sintagma verbal també pot consistir en un verb ditransitiu i els seus dos objectes:

(49) El Joan dóna el Bup a la Maria.

b	el Bup	
$Dzyx$	x dóna y a z	$Dmbj$

A (50) el subjecte expressa una quantificació universal sobre les persones (la qual cosa es reflecteix en la morfologia 'tot'+'hom' de la paraula):

(50) Tothom camina.

Px	x és una persona	$\forall x(Px \to Cx)$

Notem com formalitzem la quantificació universal amb una implicació: 'Per a tot x, *si* x és una persona, *llavors* x camina'. La formalització $\forall x(Px \wedge Cx)$ amb una conjunció seria incorrecta ja que diu 'tot és una persona i tot camina', la qual cosa no és una paràfrasi de (50).

A (51) hi ha quantificació en posició d'objecte:

(51) El Joan estima algú.

$$\exists x(Px \wedge Exj)$$

Notem aquesta vegada com la formalització de la quantificació existencial es fa amb una conjunció: 'existeix un x tal que x és una persona i el Joan estima x'. La formalització $\exists x(Px \to Exj)$ amb una implicació seria incorrecte ja que diu 'existeix un x tal que si fos persona, el Joan l'estimaria', la qual cosa no és una paràfrasi de (51).

Quan tenim quantificacions en les dues posicions de subjecte i objecte hi ha, segons els judicis dels lingüistes, ambiguïtat, per ser-hi més gran l'abast del subjecte o més gran l'abast de l'objecte:

(52) Tothom estima algú.

a. $\forall x(Px \to \exists y(Py \wedge Eyx))$
b. $?\exists y(Py \wedge \forall x(Px \to Eyx))$

La lectura d'abast més gran de subjecte (52a) diu que la gent estima persones que poden ser, en general, diferents, per exemple 'tothom estima la seva mare'. La lectura d'abast més gran d'objecte (52b) diu que hi ha una mateixa

persona que és estimada per tots, per exemple 'tothom estima la reina'. Notem que la lectura (52a) és *dominant* respecte a la lectura (52b): es presenta amb més força, per la qual cosa hem marcat (52b) amb un interrogant.

La forma en veu passiva disambigua la forma en veu activa: la lectura (53a) és molt més dominant que la lectura (53b), que hem marcat amb dos interrogants i que potser ni existeix.

(53) Algú és estimat per tothom.

a. $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow Exy))$
b. $??\forall y(Py \rightarrow \exists x(Px \wedge Exy))$

En els exemples següents hi ha coordinació conjuntiva:

(54) El Joan camina i canta.

Ax x canta $\qquad Cj \wedge Aj$

(55) El Joan respecta, i l'Albert estima, la Maria.

Ryx x respecta y
a l'Albert $\qquad Rmj \wedge Ema$

(56) El Joan dóna el Bup a la Maria i el Mèu a la Carme.

e el Mèu
c la Carme $\qquad Dmbj \wedge Dcej$

Una quantificació existencial pot ser assenyalada per 'hi ha':

(57) Hi ha un noi.

Nx x és un noi $\qquad \exists x Nx$

Notem com el nom comú es formalitza amb una lletra de predicat unària. Les maneres més habituals d'expressar les quantificacions universals i existencials són les paraules 'tot' i 'algun' seguides per noms comuns:

(58) Tots els nois corren.

Ox x corre $\qquad \forall x(Nx \rightarrow Ox)$

(59) Algun noi corre.

$\exists x(Nx \wedge Ox)$

Notem que les formalitzacions $\forall x(Nx \wedge Ox)$ i $\exists x(Nx \rightarrow Ox)$ serien incorrectes, per les raons indicades més amunt.

Alguns adjectius també es poden formalitzar amb lletres de predicat unàries:

(60) Tot noi socialista corre.

Sx x és socialista $\forall x(Nx \wedge Sx \rightarrow Ox)$

Quan es fa servir el pronom clític reflexiu, constants o variables es dupliquen:

(61) El Joan s'estima.

Ejj

(62) Algun noi s'estima.

$\exists x(Nx \wedge Exx)$

Els exemples següents illustren la formalització quan hi ha clàusules de relativització:

(63) Tots els nois que corren canten.

$\forall x(Nx \wedge Ox \rightarrow Ax)$

(64) Tots els nois que la Maria estima canten.

$\forall x(Nx \wedge Exm \rightarrow Ax)$

Finalment, la formalització de (65) i (66) revela que són paràfrasis.

(65) Algun noi que s'estima canta.

$\exists x(Nx \wedge Exx \wedge Ax)$

(66) Hi ha un noi que s'estima i que canta.

$\exists x(Nx \wedge Exx \wedge Ax)$