

Càlcul de la funció de cost (1)

- Cost d'avaluar una expressió

$$T_V(N) = T_V$$

$$T_{\odot E}(N) = T_{\odot} + T_E(N)$$

$$T_{E_1 \oplus E_2}(N) = T_{E_1}(N) + T_{\oplus} + T_{E_2}(N)$$

$$T_{F(E_1, \dots, E_l)}(N) = T_F(N) + T_{E_1}(N) + \dots + T_{E_l}(N)$$

- Cost d'executar una assignació $T_{V := E}(N) = T_{:=} + T_E(N)$

- Cost d'executar el retorn d'una funció $T_{\text{retorna } E}(N) = T_{\text{retorna}} + T_E(N)$

Càlcul de la funció de cost (2)

- Cost d'executar una crida a una acció

$$T_{A(E_1, \dots, E_l, V_1, \dots, V_m)}(N) = T_A(N) + T_{E_1}(N) + \dots + T_{E_l}(N)$$

- Cost d'una composició seqüencial

$$T_{A_1; A_2}(N) = T_{A_1}(N) + T_{A_2}(N)$$

Càlcul de la funció de cost (3)

si

$$E_1 \rightarrow A_1$$

$$\square E_2 \rightarrow A_2$$

...

$$\square E_l \rightarrow A_l$$

fsi

$$T_{\mathbf{si} E_1 \rightarrow A_1 \square \dots \square E_l \rightarrow A_l \mathbf{fsi}}(N) = T_{E_1}(N) + \dots + T_{E_l}(N) + \max\{T_{A_1}(N), \dots, T_{A_l}(N)\}$$

Càlcul de la funció de cost (4)

Cost d'una composició iterativa

mentre *E* **fer**

A

fmentre

$$T_{\text{mentre } E \text{ fer } A \text{ fmentre}}(N) = f(N) \cdot (T_E(N) + T_A(N)) + T_E(N)$$

$$T_{\text{mentre } E \text{ fer } A \text{ fmentre}}(N) = \sum_{i=1, \dots, f(N)} T_E(N, i) + T_A(N, i)$$

Definició $o()$

Definició 1 Sigui $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funció definida sobre els números naturals. Definim l'ordre de $f(n)$ com,

$$O(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tals que } \forall n \geq n_0 \ g(n) \leq c_0 \cdot f(n)\}$$

$g \in O(f(n))$. $O(f(n))$ denota la família de funcions que, com a molt, creixen tant ràpid com $f(n)$, llevat possiblement una constant multiplicativa.

Propietats $O()$ (1)

$\forall f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es compleix:

1. Invariància multiplicativa. $\forall c \in \mathbb{R}^+ \quad g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow c \cdot g(n) \in O(f(n))$
2. Invariància additiva. $\forall c \in \mathbb{R}^+ \quad g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow c + g(n) \in O(f(n))$
3. Reflexivitat. $f(n) \in O(f(n))$
4. Transitivitat. $h(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow h(n) \in O(f(n))$
5. Criteri de caracterització. $g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow O(g(n)) \subseteq O(f(n))$

Propietats $O()$ (2)

6. Regla de la suma. $g_1(n) \in O(f_1(n)) \wedge g_2(n) \in O(f_2(n)) \Rightarrow (g_1 + g_2)(n) \in O(\max(f_1, f_2)(n))$

on $(g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x)$ i $(\max(f_1, f_2))(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$.

7. Regla del producte. $g_1(n) \in O(f_1(n)) \wedge g_2(n) \in O(f_2(n)) \Rightarrow (g_1 \cdot g_2)(n) \in O(f_1(n) \cdot f_2(n))$

on $(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$.

Propietats derivades

- Considerem constants a i b tals que $0 \leq a \leq b$, llavors, es compleix $n^a \in O(n^b)$. A més són del mateix ordre si $a = b$, i si $a < b$, aleshores n^a és d'ordre inferior a n^b .
- Els ordres de complexitat satisfan:
$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset \dots \subset O(2^n) \subset O(n!)$$
- Els termes d'ordre inferior no importen. Si $T(n) = a_0 + \dots + a_k n^k$ on $a_k > 0$, tenim $T(n) \in O(n^k)$. De fet si $T(n)$ és una suma de funcions positives $f_i(n)$, aleshores $T(n) \in O(f_k(n))$, on f_k és la funció d'ordre més gran de les $\{f_i\}$.
- La base dels logaritmes no importa. Es a dir, $\forall b_1, b_2 > 0$, $\log_{b_1}(n) \in O(\log_{b_2}(n))$, ja que $\log_{b_1}(n) = \log_{b_2}(n) \cdot \log_{b_1}(b_2)$

Càlcul de cost asimptòtic (I)

Cost asimptòtic d'avaluar una expressió

- $T_V(N) \in o(1)$
- $T_{\odot E}(N) \in o(T_E(N))$
- $T_{E_1 \oplus E_2}(N) \in o(\max\{T_{E_1}(N), T_{E_2}(N)\})$
- $T_{F(E_1, \dots, E_l)}(N) \in o(\max\{T_F(N), T_{E_1}(N), \dots, T_{E_l}(N)\})$

Càlcul de cost asimptòtic

- Cost asimptòtic d'una assignació

$$T_{V:=E}(N) \in O(T_E(N))$$

- Cost asimptòtic del retorn d'una funció

$$\mathbf{retorna } E, T_{retorna} \in O(1)$$

$$T_{\mathbf{retorna } E}(N) \in O(T_E(N))$$

- Cost asimptòtic d'una crida a una acció

$$T_{A(E_1, \dots, E_l, V_1, \dots, B_m)}(N) \in O(\max\{T_A(N), T_{E_1}(N), \dots, T_{E_l}(N)\})$$

Càlcul de cost asimptòtic

- Cost asimptòtic d'una composició seqüencial

$$T_{A_1; A_2}(N) \in O(\max\{T_{A_1}(N), T_{A_2}(N)\})$$

- Cost asimptòtic d'una composició alternativa

$$T_{\mathbf{si} E_1 \rightarrow A_1 \square \dots \square E_l \rightarrow A_l \mathbf{fsi}}(N) \in O(\max\{T_{E_1}(N), \dots, T_{E_l}(N), T_{A_1}(N), \dots, T_{A_l}(N)\})$$

- Cost asimptòtic d'una composició iterativa

$$T_{\mathbf{mentre} E \mathbf{fer} A \mathbf{fmentre}}(N) \in O(f(N) \cdot \max\{T_E(N), T_A(N)\})$$

Exemple: Cerca Lineal

```
1 funció CercaLineal(x : enter; t : taulaEnters) retorna booleà
2   var i : enter; trobat : booleà fvar
3   trobat := fals
4   i := 1
5   mentre  $\neg$ trobat  $\wedge$  i  $\leq$  N fer
6     si t[i] = x  $\rightarrow$  trobat := cert
7      $\square$  t[i]  $\neq$  x  $\rightarrow$  i := i + 1
8     fsi
9   fmentre
10  retorna trobat
11 ffunció
```

Exemple: Cerca Dicotòmica

```
1 funció CercaDPos(x : enter, t : taulaEnters) retorna enter
2   var e, d, m : enter fvar
3   e := 0; d := N + 1;
4   mentre e + 1 ≠ d fer
5     m := (e + d) div 2
6     si x < t[m] → d := m
7     □ x ≥ t[m] → e := m
8     fsi
9   fmentre
10  retorna e
11 ffunció
```

Exemple: Ordenació per selecció

```
1 acció ordena(entsor  $t : \text{taulaEnters}$ );
2   var  $i, j, x.min : \text{enter}$ ; fvar
3    $i := 1$ ;
4   mentre  $i \leq N - 1$  fer
5      $min := i; j := i + 1$ ;
6     mentre  $j \leq N$  fer
7       si  $t[j] < t[min] \rightarrow min := j$ 
8        $\square t[j] \geq t[min] \rightarrow$ 
9       fsi;
10     $j := j + 1$ 
11    fmentre
12     $x := t[i]; t[i] := t[min]; t[min] := x$ ;
13     $i := i + 1$ 
14  fmentre
15 facció
```

Exemple: Ordenació per inserció

```
1 acció ordena(entsor  $t : \text{taulaEnters}$ );  
2   var  $i, j, x : \text{enter}; \text{trobat} : \text{booleà fvar};$   
3    $i := 2;$   
4   mentre  $i \leq N$  fer  
5      $x := t[i]; j := i - 1$   
6      $\text{trobat} := \text{fals}$   
7     mentre  $j \geq 1 \wedge \neg \text{trobat}$  fer  
8       si  $x \geq t[j] \rightarrow \text{trobat} := \text{cert}$   
9        $\square x < t[j] \rightarrow t[j+1] := t[j]; j := j - 1$   
10      fsi  
11      fmentre  
12       $t[j+1] := x;$   
13       $i := i + 1$   
14      fmentre  
15 facció
```