Examen Final de Lógica de Primer Orden

11 de junio del 2003, 15:00–17:45

Contestad cinco de los ocho enunciados. Contestad los diferentes enunciados en hojas separadas. Se valora el rigor, la simplicidad, la claridad y la brevedad.

(1) Sea $\Gamma = \{F_1, F_2, ..., F_k\}$ Demostrar que los 3 enunciados siguientes son equivalentes.

1. $\Gamma \models A$
2. $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \rightarrow A$ es una tautología
3. $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \wedge \neg A$ es una contradicción

(2) En el contexto de la lógica proposicional, demostrar por inducción, que para toda fórmula F existe otra equivalente en FNC y otra en FND.

(3) Demostrar el siguiente enunciado: Sea $M = (U, I)$ un modelo, y F una fórmula en el que la variable x no aparece libre. Entonces, $M(F) = M_{[x/u]}(F)$ para todo $u \in U$. Se puede utilizar sin demostración el principio correspondiente para términos, pero se debe enunciar primero correctamente.

(4) Demostrar las siguientes equivalencias:

1. $\forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$ donde x no aparece libre en G.
2. $\exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$

(5) Sea $F = \forall x \exists y G$ una fórmula en forma normal prenexa, y $F' = \forall x (G\{f(x)/y\})$ donde f es un símbolo de función que no aparece en G. Demostrad que F es satisfactible si y solo si F' lo es.

(6) Consideremos el siguiente conjunto de claúsulas. $\{\neg P(f(y, g(z)), h(b)), P(f(h(w), g(a)), v) \vee P(f(h(b), g(z)), y)\}$. Demostrad que a partir de él podemos obtener la claúsula vacia de dos formas diferentes. Una usando resolucion y factorización, y la otra, usando la regla del resolvente. En ambos casos especificar claramente los conjuntos de igualdades a unificar y las sustituciones correspondientes.

(7) Dada una fórmula F, definir lo que es una interpretación de Herbrand para F, y definir la expansión de Herbrand de F. Dada la fórmula:
$F = \forall x \forall y ((\neg Px \vee \neg Pf(a) \vee Qy) \wedge Py \wedge (\neg Pg(a, x) \vee \neg Qa))$
dar un subconjunto finito de la expansión de F que es ya insatisfactible en lógica proposicional, y verificar su insatisfactibilidad por resolución.

(8) En lógica de primer orden con igualdad, formalizar el siguiente enunciado: "Existen cono mínimo n elementos diferentes". Además definir un conjunto de fórmulas que tenga la siguiente propiedad: si un modelo satisface a todas las fórmulas del conjunto, entonces el modelo es infinito (tiene un dominio infinito). Demostrar esto último.