Programació i Algorítmica Avançades

Grau en Intel·ligència Artificial, FIB–UPC

José Luis Balcázar, Jordi Delgado

Dept. CS, UPC

2023–24, Quadrimestre de primavera

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales

Búsqueda combinatoria

Calculabilidad e indecidibilidad

Clases de complejidad

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales

Búsqueda combinatoria

Calculabilidad e indecidibilidad

Clases de complejidad

Algorítmica

En sentido laxo, incluye modelos abstractos de cálculo

- Lenguajes formales: gramáticas, modelos abstractos de cálculo.
- Búsqueda combinatoria: concepto; "backtracking"; esquemas "greedy"; Programación Dinámica; "divide-and-conquer".
- Computabilidad e indecidibilidad: las funciones recursivas parciales; lambda-cálculo.
- Teoría de la Complejidad; NP-completitud.

Evaluación

Exámenes:

Parcial: 30% de la nota de curso.

Final: 50% de la nota de curso.

Práctica: 20% de la nota de curso.

Nota final: Máximo entre

- la nota del examen final y
- la nota de curso.

Lab

Y parte de los exámenes

He enviado a las direcciones de email `fib.upc` invitaciones al curso de `jutge.org` con el mismo nombre que nuestro curso. Quien

- no lo haya recibido o
- prefiera ser invitado con un email diferente,

que me lo avise por email (a `jose.luis.balcazar@upc.edu`) enviado desde la cuenta concreta que haya de recibir la invitación. Empezaremos a usar las listas de este curso en unas tres semanas, con una excepción: hoy.

Hoy

Repasamos recursividad y árboles

- https://jutge.org/problems/X91812
- https://jutge.org/problems/P63448
- https://jutge.org/problems/P90133

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales
- Contexto y principios
- Lenguajes regulares
- Lenguajes incontextuales
- La jerarquía de Chomsky
- Máquinas de Turing

Búsqueda combinatoria

Calculabilidad e indecidibilidad

Clases de complejidad

Hacia una teoría de lenguajes formales

Maneras de procesar secuencias de símbolos

- Símbolo or letra: elementos de un conjunto finito fijo y no vacío, el alfabeto.
- Palabra: secuencia de letras, que solemos escribir yuxtapuestas (teniendo cuidado de que ello no introduzca ambigüedades).
- Las palabras tienen longitud; hay palabras finitas y también "palabras infinitas" (que no trataremos en este curso en absoluto).
- Ejemplo más común: cadenas de caracteres.
- Si Σ es un alfabeto, el conjunto de todas las palabras que podemos formar con sus letras se denota Σ^*.
- Los subconjuntos de Σ^* se llaman lenguajes formales.
- Cada lenguaje formal fijo plantea un problema decisional:

  Dada una palabra w, ¿pertenece o no a ese lenguaje formal?

Especificación de lenguajes formales, I

Enfoque decisional: Autómatas Finitos (Deterministas)

Un Autómata Finito Determinista sobre un alfabeto Σ consta de:

- Un conjunto finito de estados, de entre los cuales exactamente uno está designado como estado inicial (por tanto, el conjunto no es vacío).
- Un subconjunto de estados terminales (más propiamente denominados también estados aceptadores).
- Una función de transiciones válidas $(B, a) \to C$ (donde B y C son estados y $a \in \Sigma$) que indica el estado C (único, si lo hay) hacia el que existe una transición desde el estado B con el símbolo a.

Los símbolos del alfabeto se llaman frecuentemente terminales; pronto veremos la razón.

Especificación de lenguajes formales, II

Formalización y uso de los autómatas finitos

Si buscas "Autómata finito" en `Wikipedia`:

Formalmente, un autómata finito es una 5-tupla $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ donde:[6]

- Q es un conjunto finito de estados;
- Σ es un alfabeto finito;
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial;
- $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ es una función de transición;
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales o de aceptación.

Normalmente recurrimos a explicar autómatas finitos mediante dibujos. Veamos un par de ejemplos:

- `un ejemplo`.
- `otro ejemplo`.

Representación gráfica de autómatas finitos

Mediante un grafo dirigido

- Un vértice por estado,
- un arco del estado B al C, etiquetado a, por cada transición $(B, a) \to C$.
- Marcas convencionales para el estado inicial y para los estados aceptadores.

Entonces, una palabra sobre el alfabeto puede trazar un camino sobre el grafo, empezando en el estado inicial.

Si el camino se puede completar y termina en un estado aceptador, el autómata acepta la palabra.

Especificación de lenguajes formales, III

Enfoque generativo: gramáticas regulares

Una gramática regular consta de:

- Alfabeto terminal Σ.
- Alfabeto no terminal Γ.
- Símbolo inicial $S \in \Gamma$.
- Reglas (a veces llamadas "producciones"): pares (B, a) o tripletas (B, a, C) donde $B \in \Gamma$, $C \in \Gamma$ y $a \in \Sigma$, siempre escritas $B \to a$ o $B \to aC$ respectivamente.

Especificación de lenguajes formales, IV

Un ejemplo de gramática regular

Terminales $\{a, b, c\}$; no terminales $\{S, A\}$:

$$\{ \quad S \to aS \quad S \to bA \quad S \to b \quad A \to cA \quad A \to c \quad \}$$

Derivaciones: reglas encadenadas que empiezan por el símbolo inicial y acaban en una palabra que sólo contiene terminales, tras recorrer cero o más palabras intermedias formadas por letras de ambos alfabetos.

Una gramática regular genera el lenguaje formal de las palabras que aparecen como última palabra de alguna derivación.

$$S \to aS \to aaS \to aabA \to aabcA \to aabccA \to aabccc$$

“Regular parsing”

El mismo problema, dado la vuelta

Análisis sintáctico regular: dada una gramática regular y una palabra,

¿hay una derivación de esa gramática que lleve a esa palabra?

Autómatas finitos indeterministas

Conexión entre gramáticas regulares y autómatas finitos

Dibujamos las gramáticas regulares también como grafos dirigidos.

- Los símbolos no terminales corresponden a vértices.
- Un vértice adicional "aceptador", con una marca convencional.
- Una marca convencional para el vértice que corresponde al símbolo inicial.
- A cada regla $B \to aC$ corresponde un arco dirigido del vértice B al C, etiquetado a.
- A cada regla $B \to a$ corresponde un arco dirigido del vértice B al vértice aceptador, etiquetado a.

Autómatas finitos indeterministas

Conexión entre gramáticas regulares y autómatas finitos

Dibujamos las gramáticas regulares también como grafos dirigidos.

- Los símbolos no terminales corresponden a vértices.
- Un vértice adicional "aceptador", con una marca convencional.
- Una marca convencional para el vértice que corresponde al símbolo inicial.
- A cada regla $B \to aC$ corresponde un arco dirigido del vértice B al C, etiquetado a.
- A cada regla $B \to a$ corresponde un arco dirigido del vértice B al vértice aceptador, etiquetado a.
- Ahora las derivaciones son caminos en el grafo, del vértice inicial al vértice aceptador.

¿A qué se parece? Y... ¿en qué se diferencia?

Especificación de lenguajes formales, V

O bien Autómatas finitos indeterministas, II

Un Autómata Finito Indeterminista sobre un alfabeto Σ consta de:

- Un conjunto de estados, de entre los cuales al menos uno está designado como estado inicial.
- Un subconjunto de estados terminales (más propiamente denominados también estados aceptadores).
- Una relación de transiciones válidas (B, a, C) (donde B y C son estados y $a \in \Sigma$) que indica estados C (¡puede haber varios!) hacia los que existe una transición desde el estado B con el símbolo a.

Entonces, una palabra sobre el alfabeto Σ puede trazar caminos sobre el grafo, empezando en un estado inicial.

Si algún camino se puede completar y termina en un estado aceptador, el autómata acepta la palabra.

Lenguajes regulares, I

Definiciones alternativas

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. L es el lenguaje generado por una gramática regular.
2. L es el lenguaje aceptado por un autómata finito indeterminista.
3. L es el lenguaje aceptado por un autómata finito determinista.

Los lenguajes formales L para los que se cumplen estas condiciones se llaman lenguajes regulares.

Podemos ver la equivalencia de las dos primeras a través del grafo que representa una gramática o un autómata.

La equivalencia con autómatas finitos deterministas requiere argumentación específica: la construcción "powerset".

“The Powerset”

Si L es el lenguaje aceptado por un autómata finito indeterminista, existe uno determinista que también lo acepta.

“The Powerset”

Si L es el lenguaje aceptado por un autómata finito indeterminista, existe uno determinista que también lo acepta.

Idea de la argumentación: seguimos “en paralelo”, a la vez, todos los posibles caminos en el autómata indeterminista.

"The Powerset"

Si L es el lenguaje aceptado por un autómata finito indeterminista, existe uno determinista que también lo acepta.

Idea de la argumentación: seguimos "en paralelo", a la vez, todos los posibles caminos en el autómata indeterminista.

1. Creamos un estado para cada conjunto de estados del autómata indeterminista dado, N.
2. Llamamos estado inicial al formado por todos los estados iniciales del autómata indeterminista N.
3. Consideramos estados aceptadores todos los que contengan algún estado aceptador del autómata indeterminista N.
4. Definimos la función de transición desde el conjunto V con el símbolo a como el conjunto:

$$\{C \in N \mid (B, a, C) \text{ es una transición de } N \text{ y } B \in V\}$$

Si hay un camino aceptador en N, también lo hay en este nuevo autómata, que es determinista.

La “palabra vacía”

Una piedra en el zapato

En muchas argumentaciones sobre lenguajes formales, la palabra vacía requiere argumentación separada.

En estas breves horas introductorias, omitimos esas discusiones.

En un curso más detallado de lenguajes formales, se habría de tener en cuenta ese caso en cada argumentación y ajustar adecuadamente los enunciados.

Lenguajes regulares, II

Propiedades "positivas": lenguajes que son regulares

- Las uniones, intersecciones y complementarios de los lenguajes regulares son regulares.
- La concatenación de lenguajes regulares es regular:

$$LL' = \{ww' \mid w \in L,\ w' \in L'\}$$

- La estrella de Kleene de un lenguaje regular es regular:

$$L^* = \{w_0 \dots w_n \mid w_i \in L \text{ for all } i \leq n\}$$

(Para expresar concatenaciones y estrellas de Kleene, frecuentemente omitimos las "llaves" de conjunto.)

Lenguajes regulares, III

La propiedad de "bombeo", negativa: cómo ver que un lenguaje no es regular

Si L es un lenguaje regular, hay un número natural p tal que toda palabra $w \in L$ de longitud al menos p se puede descomponer en tres partes $w = xyz$ con las siguientes propiedades:

- $|y| > 0$ (la longitud de y es positiva, no nula),
- $|xy| \leq p$,
- $xy^*z \subseteq L$.

Razón: si la palabra w es aceptada por un autómata finito y es suficientemente larga, el camino en el grafo del autómata habrá de repetir estado.

Lenguajes regulares, III

La propiedad de "bombeo", negativa: cómo ver que un lenguaje no es regular

Si L es un lenguaje regular, hay un número natural p tal que toda palabra $w \in L$ de longitud al menos p se puede descomponer en tres partes $w = xyz$ con las siguientes propiedades:

- $|y| > 0$ (la longitud de y es positiva, no nula),
- $|xy| \leq p$,
- $xy^*z \subseteq L$.

Razón: si la palabra w es aceptada por un autómata finito y es suficientemente larga, el camino en el grafo del autómata habrá de repetir estado.

Consideramos

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

Lenguajes regulares, III

La propiedad de "bombeo", negativa: cómo ver que un lenguaje no es regular

Si L es un lenguaje regular, hay un número natural p tal que toda palabra $w \in L$ de longitud al menos p se puede descomponer en tres partes $w = xyz$ con las siguientes propiedades:

- $|y| > 0$ (la longitud de y es positiva, no nula),
- $|xy| \leq p$,
- $xy^*z \subseteq L$.

Razón: si la palabra w es aceptada por un autómata finito y es suficientemente larga, el camino en el grafo del autómata habrá de repetir estado.

Consideramos

$$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}.$$

¡NO es regular!

Especificación de lenguajes formales, VI

Un paso más allá de los lenguajes regulares: gramáticas incontextuales

$$\{ \quad S \to aSb \quad S \to ab \quad \}$$

Especificación de lenguajes formales, VI

Un paso más allá de los lenguajes regulares: gramáticas incontextuales

$$\{ \quad S \to aSb \quad S \to ab \quad \}$$

Otro ejemplo:

$$\{ \quad S \to () \quad S \to (S) \quad S \to SS \quad \}$$

(Lenguajes de Dyck: parentizaciones correctas con uno o más tipos de paréntesis... ¡cuidado con la palabra vacía!)

Especificación de lenguajes formales, VII

Añadimos una pila a los autómatas finitos

Autómatas indeterministas con pila: información adicional que se accede en el orden contrario al que se almacena.

Cada transición depende, además del estado y el símbolo, de lo que sacamos de la cima de la pila; y trae aparejados nuevos símbolos que entran en la pila (siempre por la cima).

En este caso, ya no son equivalentes la versión determinista y la versión indeterminista.

`http://lti.cs.vt.edu/FL/Books/VisFormalLang/html/PDA.html`

Lenguajes incontextuales, I

Nociones de muy amplia aplicación

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. L es el lenguaje generado por una gramática incontextual:

   son igual que las regulares, excepto que la parte derecha de cada regla puede ser cualquier secuencia de terminales y no terminales.

2. L es el lenguaje aceptado por un autómata con pila indeterminista.

Los lenguajes aceptados por autómatas finitos deterministas permiten algoritmos de "parsing" muy eficientes.

Muchas aplicaciones.

Lenguajes incontextuales, II

Casos no incontextuales

Existe una variante de la propiedad de "bombeo" apropiada para lenguajes incontextuales (no entramos en detalles).

Por ejemplo, esa propiedad indica que

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

no es incontextual.

Lenguajes incontextuales, II

Casos no incontextuales

Existe una variante de la propiedad de "bombeo" apropiada para lenguajes incontextuales (no entramos en detalles).

Por ejemplo, esa propiedad indica que

$$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}.$$

no es incontextual.

Existen diversos fenómenos no incontextuales en las lenguas humanas.

Especificación de lenguajes formales, VIII

Gramáticas sensibles al contexto

Un intento de modelar con gramáticas las lenguas humanas. . .

"Condicionamos" la aplicación de las reglas a su contexto: consideramos gramáticas con reglas de la forma

$$xAy \to xwy$$

que sería como "$A \to w$ pero sólo si el contexto son x e y".

Especificación de lenguajes formales, VIII

Gramáticas sensibles al contexto

Un intento de modelar con gramáticas las lenguas humanas. . .

"Condicionamos" la aplicación de las reglas a su contexto: consideramos gramáticas con reglas de la forma

$$xAy \to xwy$$

que sería como "$A \to w$ pero sólo si el contexto son x e y".

"Overkill": se pueden expresar lenguajes enormemente complejos.

Cualquier gramática en que las partes derechas de las reglas sean al menos tan largas como sus respectivas partes izquierdas ("gramáticas no contractivas") se puede transformar a esta definición.

Ejemplo:

$$\{ \quad S \to aSBc \quad S \to abc \quad cB \to Bc \qquad bB \to bb \qquad \}$$

La jerarquía de Chomsky

Con algunas salvedades referentes a la palabra vacía

Noam Chomsky, 1956:

Tipo 0: Gramáticas arbitrarias.

Corresponden a las máquinas de Turing y a los lenguajes enumerables recursivamente.

Tipo 1: Gramáticas sensibles al contexto; equivalentemente, gramáticas no contractivas.

Corresponden a las máquinas de Turing linealmente acotadas.

Tipo 2: Gramáticas incontextuales.

Corresponden a los autómatas indeterministas con pila y a los lenguajes incontextuales.

Tipo 3: Gramáticas regulares.

Corresponden a los autómatas finitos y a los lenguajes regulares.

Variantes

- Expresiones regulares.
- Expresiones regulares extendidas.
- Autómatas finitos con salida (transductores finitos, tratados en alguna otra asignatura).
- Autómatas finitos con pesos y/o probabilidades.
- Modelos de Markov (combinación de las dos ideas anteriores).
- Modelos de Markov ocultos (HMM, "hidden Markov models").
- "Mildly context sensitive languages".
- Gramáticas probabilistas.
- ...

Preguntas

Sobre temas aparentemente variados... que resultan ser el mismo

- El "tipo 0" de la jerarquía de Chomsky: ¿qué ocurre cuando consideramos gramáticas sin ningún tipo de restricciones?
- ¿Cambian mucho las cosas si un autómata con pila tiene, en vez de una sola pila, dos?
- ¿Con qué números reales estamos trabajando en realidad cuando desarrollamos todos los algoritmos del Cálculo Numérico?

Máquinas de Turing, I

Contexto

Estado del arte hacia 1935:

1. El "Entscheidungsproblem" de Gödel: ¿es posible avanzar en Matemáticas sin requerir ingenio?
2. Los enfoques de Gödel y de Church ya identifican la idea de cálculos que se efectúan sobre un dato, siguiendo un "proceso automático" o mecánico.
3. Ya está claro para ellos que la clave conceptual radica en la descomposición de un "cálculo" en "pasos".
4. Esos pasos han de ser "elementales", sin discusión posible (pero eso aún no se ha logrado).
5. Y también está claro que el tema es "importante" y tendrá consecuencias relevantes, porque permitirá argumentar sobre el Entscheidungsproblem y... quién sabe, más adelante, qué otras consecuencias. :)

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.
4. La descripción de una máquina puede proporcionarse como dato a otra máquina.

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.
4. La descripción de una máquina puede proporcionarse como dato a otra máquina.
5. Podemos componer máquinas... ¡mediante otra máquina!

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.
4. La descripción de una máquina puede proporcionarse como dato a otra máquina.
5. Podemos componer máquinas... ¡mediante otra máquina!
6. Y lo más importante y profundo, la máquina de Turing universal:

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.
4. La descripción de una máquina puede proporcionarse como dato a otra máquina.
5. Podemos componer máquinas... ¡mediante otra máquina!
6. Y lo más importante y profundo, la máquina de Turing universal:
   - Recibe la descripción de una máquina M y la de un dato inicial para ella x;

Máquinas de Turing, II

https://www.cs.virginia.edu/~robins/Turing_Paper_1936.pdf

Contribuciones de Turing mediante sus "máquinas"

1. Los pasos son elementales, sin discusión posible.
2. Se pueden "componer funciones" combinando máquinas.
3. Se pueden concebir descripciones de todas las máquinas.
4. La descripción de una máquina puede proporcionarse como dato a otra máquina.
5. Podemos componer máquinas... ¡mediante otra máquina!
6. Y lo más importante y profundo, la máquina de Turing universal:
   - Recibe la descripción de una máquina M y la de un dato inicial para ella x;
   - y simula la computación que haría M sobre x, obteniendo el mismo resultado.

Máquinas de Turing, III

"Demos" en la web

Se pueden ver como generalización de los autómatas finitos.

En vez del concepto original, veremos una simplificación propuesta por Emil Post sobre la versión original de Turing:

- Entrada y memoria (pila) se unifican en una cinta.
- Podemos movernos por ella en ambas direcciones: ya no hay que imponer uso como pila.
- Vale modificar los símbolos.
- Implementaciones online:

  `https://turingmachine.io/`

  `http://morphett.info/turing/turing.html`

  `https://turingmachinesimulator.com/`

Máquinas de Turing, IV

O bien: Especificación de lenguajes formales, IX

- Podemos cambiar como queramos el alfabeto (a condición de tener al menos dos símbolos, contando el "espacio vacío" como uno de ellos).
- Podemos poner en juego cualquier número de cintas.
- Podemos usar "cintas" multidimensionales.
- Podemos cambiar de muchas maneras el criterio para obtener el resultado o la decisión de aceptación.

Y, esencialmente, nada cambia.

Máquinas de Turing, V

Posibilidades

Y, además:

- Podemos simular derivaciones de gramáticas.
- Y viceversa: podemos describir mediante gramáticas los pasos de cálculo de una máquina de Turing.
- Podemos codificar datos, resultados y descripciones mediante números naturales.
- Y podemos usar números naturales para referirnos a máquinas o a sus datos.

Volveremos más adelante sobre las consecuencias de estos avances: el desarrollo de las teorías de la Calculabilidad y de la Complejidad Computacional.

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales

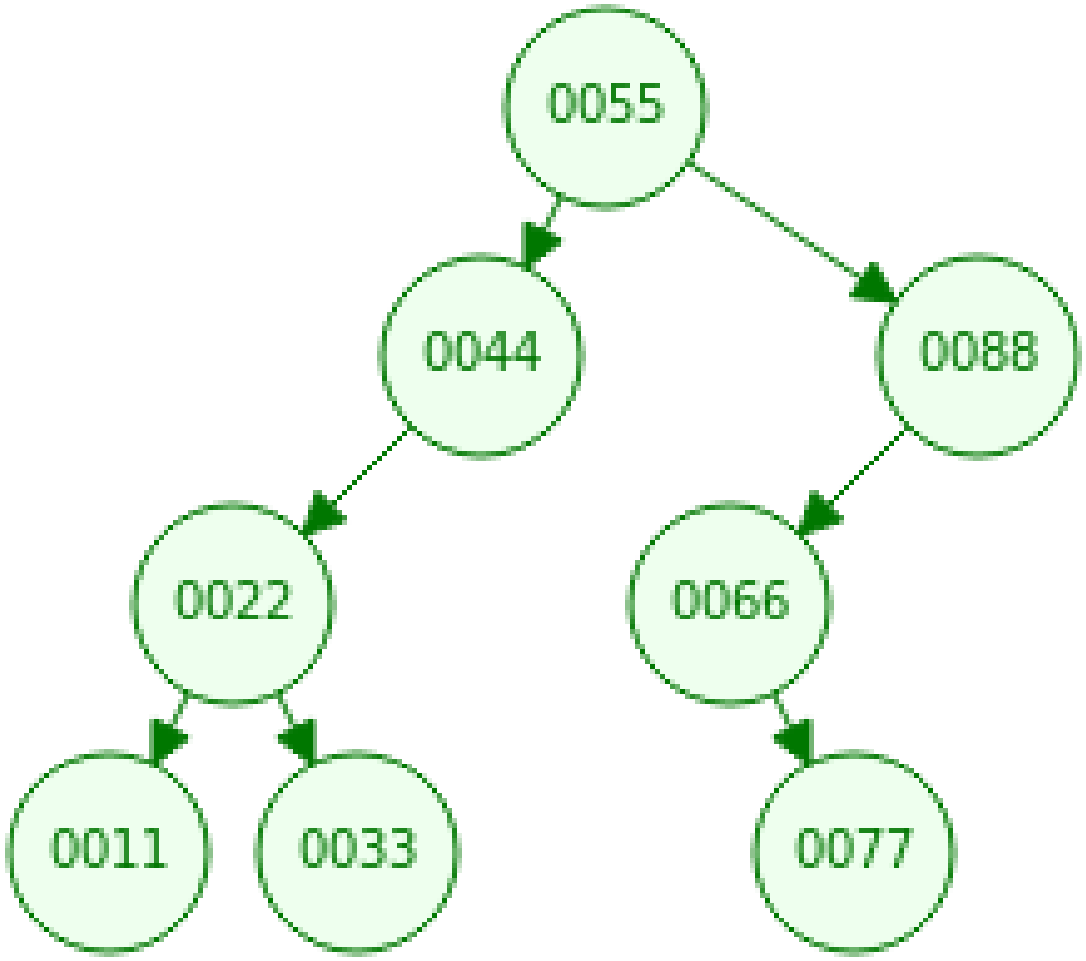
Búsqueda combinatoria
- Búsqueda exhaustiva
- Estructura de subproblemas
- Backtracking
- Esquemas “greedy”
- Programación Dinámica (Dynamic Programming)

Calculabilidad e indecidibilidad

Clases de complejidad

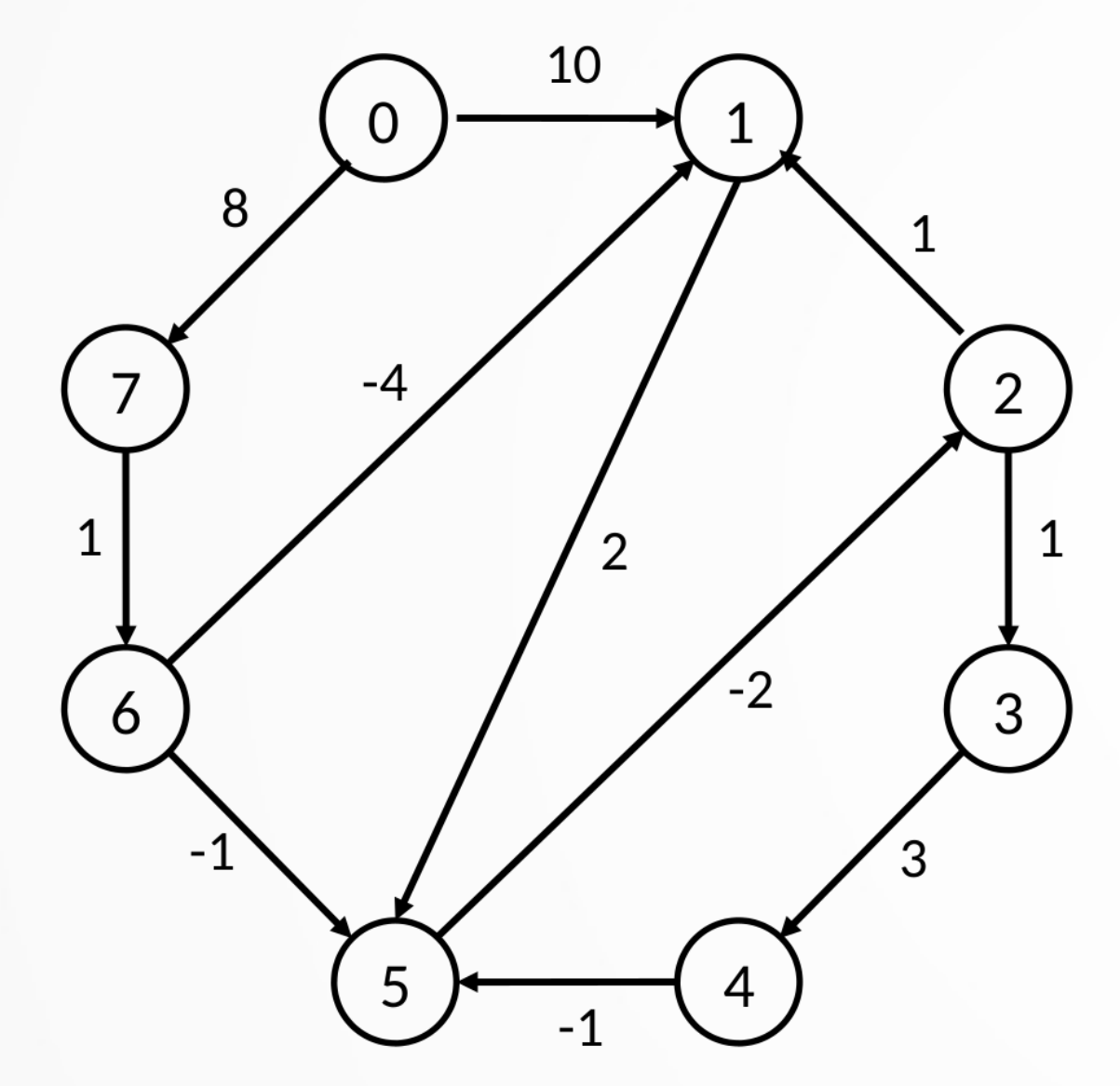
Recorridos de árboles

Repaso: preorden, inorden, postorden



Recorridos de grafos

Repaso: depth-first search



Búsqueda combinatoria, I

Combinatorial search

Algunas estrategias de diseño de algoritmos, de entre las muchísimas posibles, han resultado particularmente exitosas.

Contexto intuitivo para explicarlas

y analizar sus parecidos y diferencias:

- noción de "caso" de un problema computacional;
- noción de "solución candidata" para un caso;
- noción de "solución que buscamos", en dos posibles enfoques:

  (a) mera existencia (una solución? o todas ellas?),
  (b) optimalidad (maximización? minimización?).

Por supuesto, no todo problema computacional admite este tipo de análisis, pero muchos sí lo permiten (y aún más si tomamos estas nociones guía de forma un poco relajada pero aún útil).

Búsqueda combinatoria, II

Frecuentemente podemos aplicar el esquema de más de una manera

Árboles de expansión:

Dado un grafo conexo, con pesos en las aristas, encuéntrese en él un subgrafo conexo

(a) que conecta todos los vértices sin crear ciclos;

Búsqueda combinatoria, II

Frecuentemente podemos aplicar el esquema de más de una manera

Árboles de expansión:

Dado un grafo conexo, con pesos en las aristas, encuéntrese en él un subgrafo conexo

(a) que conecta todos los vértices sin crear ciclos; o

(b) que conecta todos los vértices con el mínimo peso total.

Búsqueda combinatoria, II

Frecuentemente podemos aplicar el esquema de más de una manera

Árboles de expansión:

Dado un grafo conexo, con pesos en las aristas, encuéntrese en él un subgrafo conexo

(a) que conecta todos los vértices sin crear ciclos; o

(b) que conecta todos los vértices con el mínimo peso total.

"Mochilas":

Dados números V y W y un conjunto de objetos, cada uno con un peso y un valor, encuéntrese un subconjunto de tales objetos

(a) que alcanza valor total al menos V pero pesa a lo más W;

(b) que alcanza el mayor valor posible pero pesa a lo más W;

(c) que alcanza valor total al menos V pero pesa lo menos posible.

Búsqueda combinatoria, III

O bien: Árboles de expansión, I

"Spanning trees":

- Noción de "caso" de un problema computacional:

  "Dado un grafo conexo con pesos en las aristas..."
- noción de "solución candidata" para un caso:

  "encuéntrese en él un subgrafo conexo que...";
- noción de "solución que buscamos", en dos posibles enfoques:

  (a) mera existencia, como:
  "conecta todos los vértices sin crear ciclos" o

Búsqueda combinatoria, III

O bien: Árboles de expansión, I

"Spanning trees":

- Noción de "caso" de un problema computacional:

  "Dado un grafo conexo con pesos en las aristas..."
- noción de "solución candidata" para un caso:

  "encuéntrese en él un subgrafo conexo que...";
- noción de "solución que buscamos", en dos posibles enfoques:

  (a) mera existencia, como:
  "conecta todos los vértices sin crear ciclos" o

  (b) optimalidad (maximización o minimización), como:
  "conecta todos los vértices con el mínimo peso total".

Búsqueda combinatoria, IV

O bien: Mochila, I

"Mochilas":

- Noción de "caso" de un problema computacional:

  "Dados números V y W y un conjunto de objetos, cada uno con un peso y un valor..."

- noción de "solución candidata" para un caso:

  "encuéntrese un subconjunto de tales objetos...";

- noción de "solución que buscamos", en dos posibles enfoques:

  (a) mera existencia, como:
  "que alcanza valor total al menos V pero pesa a lo más W";

  (b) optimalidad (maximización o minimización), como:
  "que alcanza el mayor valor posible pero pesa a lo más W;"
  o:
  "que alcanza valor total al menos V pero pesa lo menos posible".

Empezaremos solucionando versiones decisionales, y luego extenderemos las soluciones a los casos de optimización.

Búsqueda exhaustiva, I

Simplemente "probemos todas las posibles soluciones", ¿no?

Al encontrarnos con un nuevo problema:

¿Cómo proceder?

1. Exploramos una o varias maneras de encajarlo en el esquema de búsqueda combinatoria.
2. De los esquemas algorítmicos que conozcamos, ¿cuáles podemos aplicar?
3. O... ¿tenemos que explorar todas las posibilidades?

Mochila, II

Versión decisional, buscaremos primero todas las soluciones

Dados:

- objetos $i \in \{0, \ldots, N-1\}$
- con pesos $w[i]$ y valores $v[i]$,
- máxima capacidad de la mochila W,
- valor total deseado V,

encuéntrese un conjunto de objetos "que poner en la mochila" de manera que:

- su peso total no supera la capacidad máxima W, y
- su valor total es al menos el valor deseado V.

Ejemplo:

Peso máximo $W = 26$, valor deseado $V = 45$ con objetos de:

Pesos:	9	8	12	11	7
Valores:	16	15	24	23	13

Mochila, III

"La cuenta de la vieja", "brute force", "perebor"

```
def slow_knapsack(objects, max_w, min_v)
    sols = list()
    for candidate in powerset(objects):
        if (totalweight(candidate) <= max_w and
            totalvalue(candidate) >= min_v):
            sols.append(candidate)
    return sols
```

Mochila, III

"La cuenta de la vieja", "brute force", "perebor"

```
def slow_knapsack(objects, max_w, min_v)
    sols = list()
    for candidate in powerset(objects):
        if (totalweight(candidate) <= max_w and
            totalvalue(candidate) >= min_v):
            sols.append(candidate)
    return sols
```

Diversas posibilidades para el iterador `powerset`:

- Resuélvelo sin particular inspiración previa: P18957.
- "Itertools recipes" en la documentación oficial de Python, capítulo sobre `itertools`.
- Aprender a programar generadores (es fácil) y hacerlos recursivos (ya no tan fácil).

Mochila, III

"La cuenta de la vieja", "brute force", "perebor"

```
def slow_knapsack(objects, max_w, min_v)
    sols = list()
    for candidate in powerset(objects):
        if (totalweight(candidate) <= max_w and
            totalvalue(candidate) >= min_v):
            sols.append(candidate)
    return sols
```

Diversas posibilidades para el iterador `powerset`:

- Resuélvelo sin particular inspiración previa: P18957.
- "Itertools recipes" en la documentación oficial de Python, capítulo sobre `itertools`.
- Aprender a programar generadores (es fácil) y hacerlos recursivos (ya no tan fácil).
- Demasiado lento para casi cualquier propósito práctico.

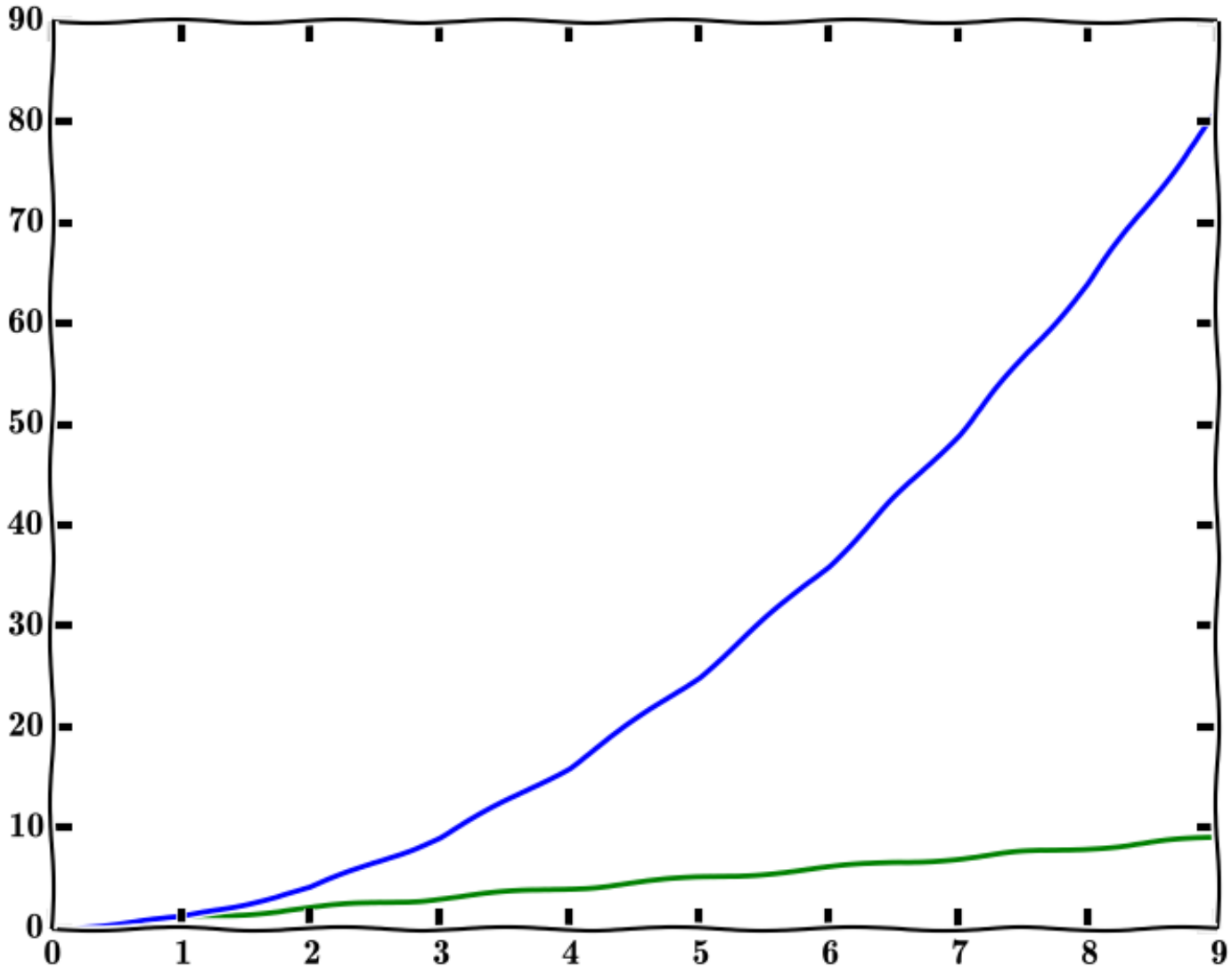
Búsqueda exhaustiva, II

Límites de la búsqueda exhaustiva

1. "Set-based combinatorial search": buscamos una aguja en el pajar de todos los subconjuntos de un conjunto dado.
2. "Permutation-based combinatorial search": buscamos una aguja en el pajar de todas las permutaciones de una secuencia dada.
3. ¿Realmente tenemos que explorar todas las posibilidades?
   - Todos los subconjuntos ("powerset")... 2^N casos.
   - Todas las permutaciones... $N!$ casos.

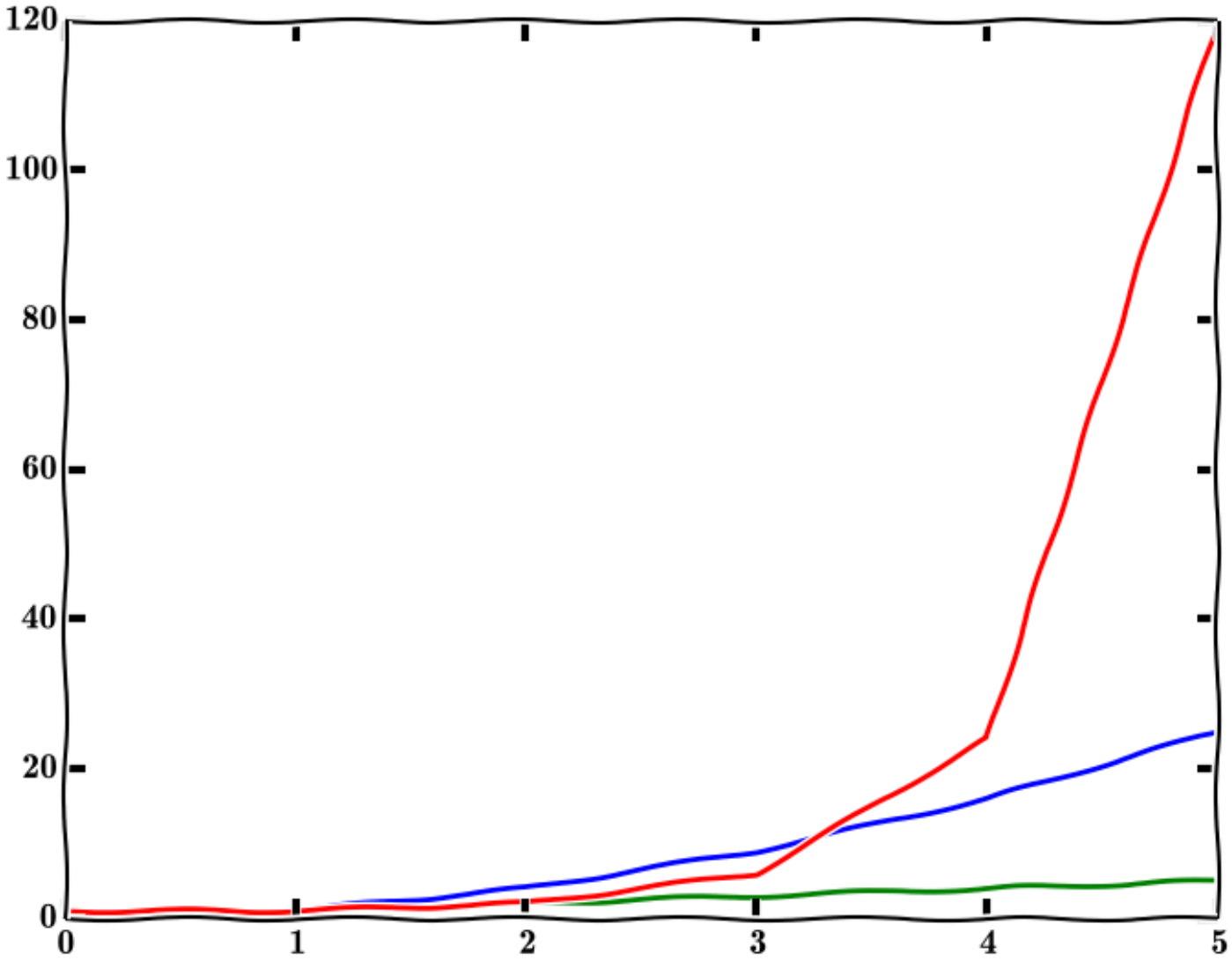
El factorial y el crecimiento exponential, I

No tomarás el nombre de la Exponencial en vano!



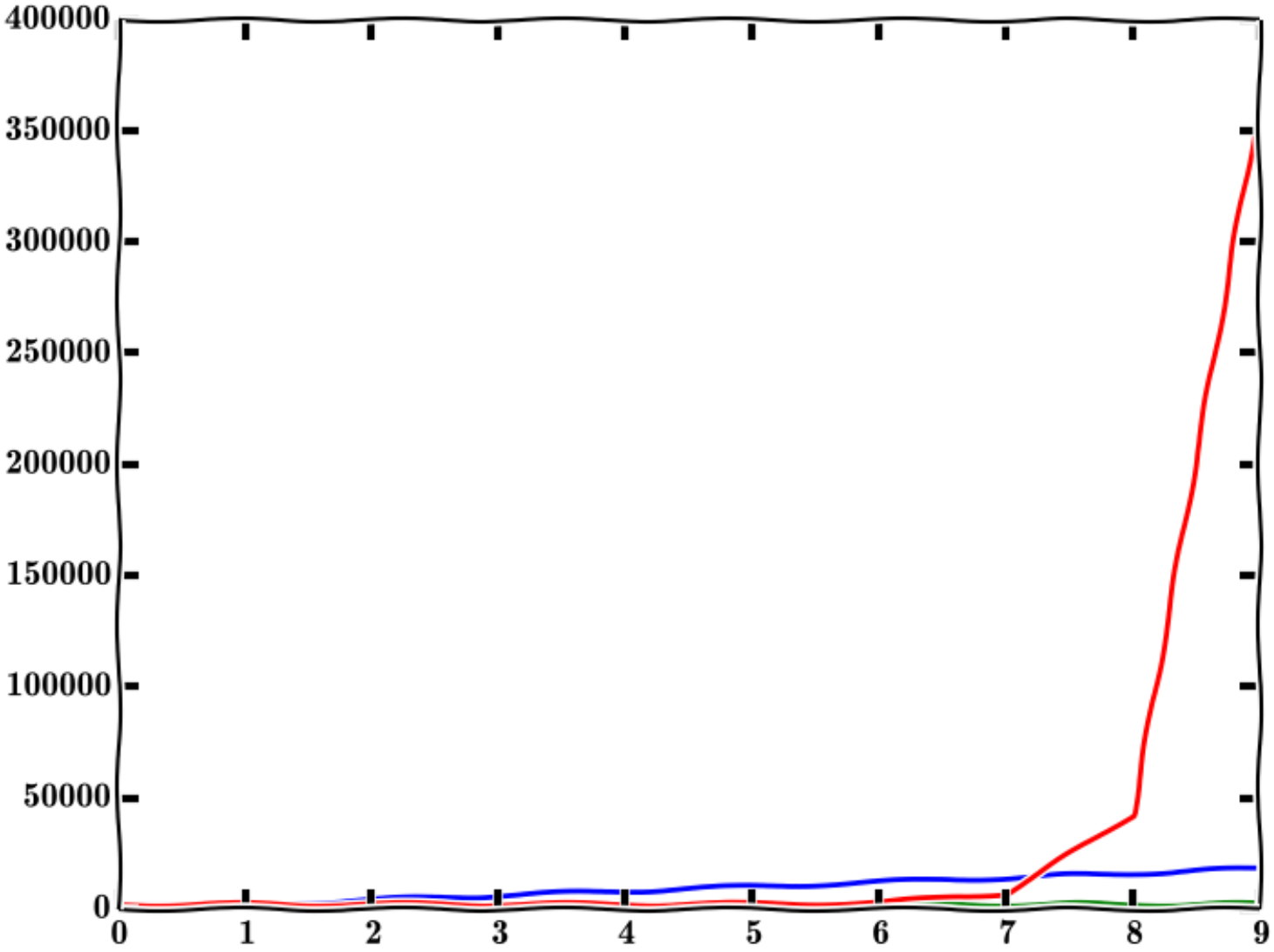
El factorial y el crecimiento exponential, I

No tomarás el nombre de la Exponencial en vano!



El factorial y el crecimiento exponential, I

No tomarás el nombre de la Exponencial en vano!



El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

para $N = 15$: 8 milésimas de segundo (8×10^{-3});

El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

para $N = 15$: 8 milésimas de segundo (8×10^{-3});

para $N = 18$: medio segundo;

El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

para $N = 15$: 8 milésimas de segundo (8×10^{-3});

para $N = 18$: medio segundo;

para $N = 21$: una hora;

El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

para $N = 15$: 8 milésimas de segundo (8×10^{-3});

para $N = 18$: medio segundo;

para $N = 21$: una hora;

para $N = 24$: un año y medio;

El factorial y el crecimiento exponential, II

$N!$ crece exponencialmente, dijo Stirling

Supongamos:

- que sólo necesitamos una operación elemental por cada una de las $N!$ configuraciones posibles, y que
- podemos contar con que se realicen 13000 billones de operaciones por segundo (13×10^{15}).

Entonces, tardaremos:

para $N = 12$: milmillonésimas de segundo (10^{-9});

para $N = 15$: 8 milésimas de segundo (8×10^{-3});

para $N = 18$: medio segundo;

para $N = 21$: una hora;

para $N = 24$: un año y medio;

para $N = 27$: más de 250 siglos...

Búsqueda combinatoria, V

Variantes

¿Qué estructura combinatoria hay detrás?

- ¿Conjuntos? "Set-based backtracking".
- ¿Permutaciones? "Permutation-based backtracking".
- ...

Y, en términos de los detalles algorítmicos, puede ser:

- Recorrido para encontrar todas las soluciones.

Búsqueda combinatoria, V

Variantes

¿Qué estructura combinatoria hay detrás?

- ¿Conjuntos? "Set-based backtracking".
- ¿Permutaciones? "Permutation-based backtracking".
- ...

Y, en términos de los detalles algorítmicos, puede ser:

- Recorrido para encontrar todas las soluciones.
- Búsqueda (similar a la lineal) para encontrar una solución.

Búsqueda combinatoria, V

Variantes

¿Qué estructura combinatoria hay detrás?

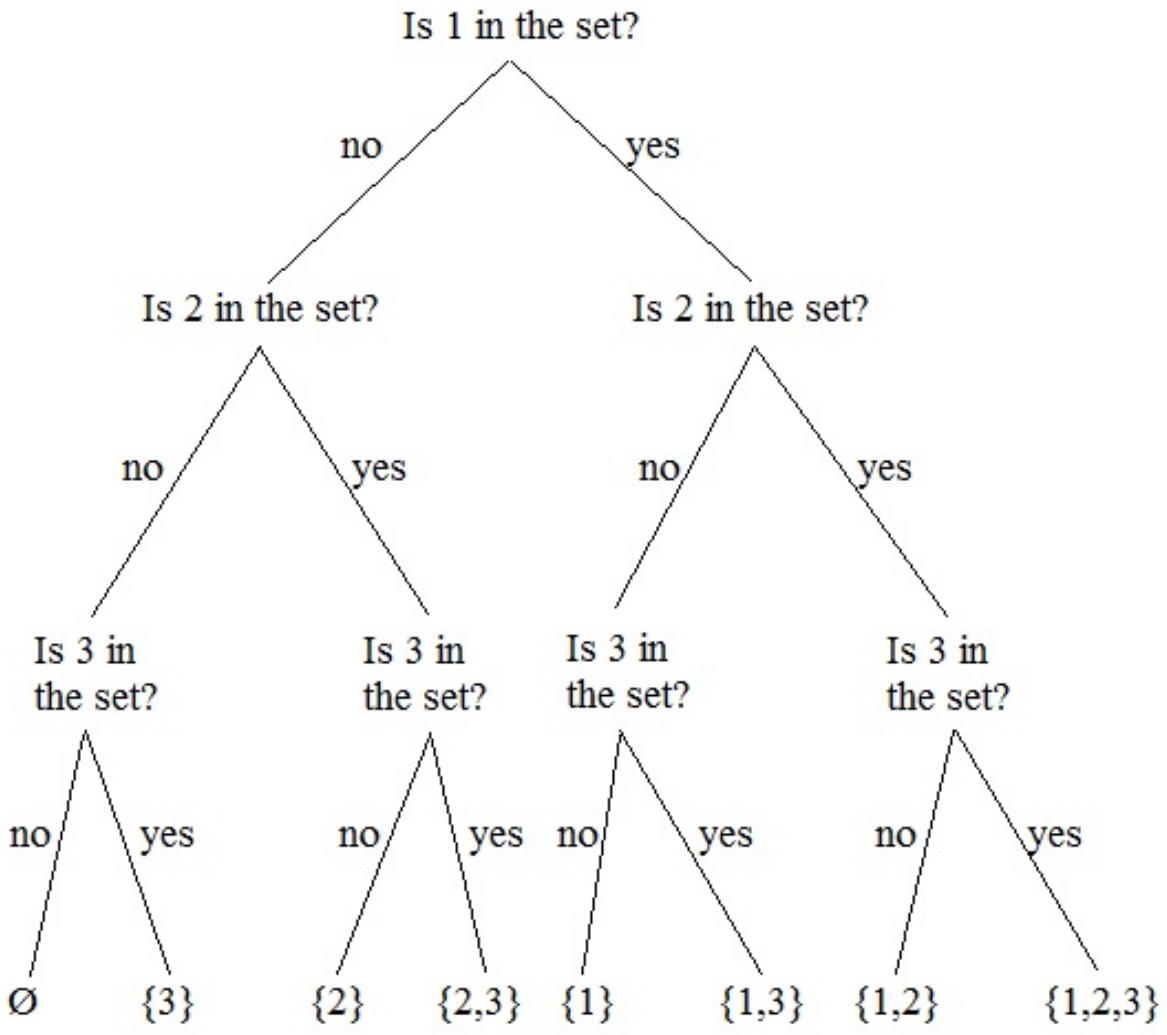
- ¿Conjuntos? "Set-based backtracking".
- ¿Permutaciones? "Permutation-based backtracking".
- ...

Y, en términos de los detalles algorítmicos, puede ser:

- Recorrido para encontrar todas las soluciones.
- Búsqueda (similar a la lineal) para encontrar una solución.
- Recorrido de optimización para encontrar la mejor solución.

Mochila, IV

Recorrido alternativo del "powerset"



By: Brian M. Scott at math.stackexchange.com

Mochila, V

"La cuenta de la vieja" siguiendo el recorrido alternativo

```
def knapsack(weights, values, current_item, max_w, min_v):
  if current_item == -1:
    "all items considered, none left"
    if min_v <= 0 and max_w >= 0:
      return [ list() ]
    else:
      return list()

  sols0 = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                   max_w, min_v)
  sols1 = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                   max_w - weights[current_item],
                   min_v - values[current_item])
  sols0.extend( sol + [ current_item ] for sol in sols1 )
  return sols0
```

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es
  (a) ya "inaceptable"

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es
  (a) ya "inaceptable"
  (es decir, el subproblema no tiene solución) o

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es
  (a) ya "inaceptable"
  (es decir, el subproblema no tiene solución) o
  (b) "aceptable" pero aún "incompleta"

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es
  (a) ya "inaceptable"
  (es decir, el subproblema no tiene solución) o
  (b) "aceptable" pero aún "incompleta"
  (puede ser que el problema tenga solución, hay que continuar la exploración) o

Búsqueda combinatoria, VI

El siguiente ingrediente

Adicionalmente:

Los candidatos a solución se estructuran en

- una noción de "subproblema", obtenido a través de una "secuencia de decisiones" que progresan hacia las soluciones candidatas

  (frecuentemente se denomina "problemas locales" a los subproblemas, y entonces el problema original se denomina "global");
- una función que nos indica si una secuencia de decisiones es
  (a) ya "inaceptable"
  (es decir, el subproblema no tiene solución) o
  (b) "aceptable" pero aún "incompleta"
  (puede ser que el problema tenga solución, hay que continuar la exploración) o
  (c) una solución "completa" para el problema global.

Backtracking, I

Concepto

Organizamos la exploración de manera controlada:

Depth-First Search / preorden, excepto que el grafo o árbol es implícito.

- Cada subproblema es un vértice de un grafo o árbol (probablemente muy grande) que queda en nuestra imaginación.
- Las aristas de ese grafo imaginario son decisiones que nos llevan de un subproblema a otro.
- Y lo principal: cuando detectamos un subproblema no factible ("callejón sin salida"), nos ahorramos la exploración de todas las configuraciones que requieran solucionarlo.

(El nombre viene "heredado" de antaño, antes de que la programación recursiva fuera una opción generalizada: era preciso "programar explícitamente" el cambio de subárbol a explorar.)

Búsqueda combinatoria, VII

O bien: Árboles de expansión, II

Árboles de expansión:

Subproblema:

- encontrar el árbol de expansión de un subgrafo, o bien
- completar un único árbol de expansión incompleto:
  - manteniendo un árbol parcial ya construido, o bien

Búsqueda combinatoria, VII

O bien: Árboles de expansión, II

Árboles de expansión:

Subproblema:

- encontrar el árbol de expansión de un subgrafo, o bien
- completar un único árbol de expansión incompleto:
  - manteniendo un árbol parcial ya construido, o bien
  - manteniendo un conjunto de árboles parciales ya construidos (spanning forest)...

Búsqueda combinatoria, VII

O bien: Árboles de expansión, II

Árboles de expansión:

Subproblema:

- encontrar el árbol de expansión de un subgrafo, o bien
- completar un único árbol de expansión incompleto:
  - manteniendo un árbol parcial ya construido, o bien
  - manteniendo un conjunto de árboles parciales ya construidos (spanning forest)...

Secuencia de decisiones: el árbol crece en una arista más...

(a) solución "completa" para el problema global: conecta todo,

Búsqueda combinatoria, VII

O bien: Árboles de expansión, II

Árboles de expansión:

Subproblema:

- encontrar el árbol de expansión de un subgrafo, o bien
- completar un único árbol de expansión incompleto:
  - manteniendo un árbol parcial ya construido, o bien
  - manteniendo un conjunto de árboles parciales ya construidos (spanning forest)...

Secuencia de decisiones: el árbol crece en una arista más...

(a) solución "completa" para el problema global: conecta todo,

(b) ya "inaceptable": la nueva arista crea un ciclo,

Búsqueda combinatoria, VII

O bien: Árboles de expansión, II

Árboles de expansión:

Subproblema:

- encontrar el árbol de expansión de un subgrafo, o bien
- completar un único árbol de expansión incompleto:
  - manteniendo un árbol parcial ya construido, o bien
  - manteniendo un conjunto de árboles parciales ya construidos (spanning forest)...

Secuencia de decisiones: el árbol crece en una arista más...

(a) solución "completa" para el problema global: conecta todo,

(b) ya "inaceptable": la nueva arista crea un ciclo,

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Búsqueda combinatoria, VIII

O bien: Mochila, VI

¿Podemos lograr valor total al menos V con peso no superior a W?

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Búsqueda combinatoria, VIII

O bien: Mochila, VI

¿Podemos lograr valor total al menos V con peso no superior a W?

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Secuencia de decisiones: consideramos un objeto nuevo; o bien nos lo quedamos o bien lo descartamos.

(a) solución "completa" para el problema global: hemos considerado todos los objetos;

Búsqueda combinatoria, VIII

O bien: Mochila, VI

¿Podemos lograr valor total al menos V con peso no superior a W?

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Secuencia de decisiones: consideramos un objeto nuevo; o bien nos lo quedamos o bien lo descartamos.

(a) solución "completa" para el problema global: hemos considerado todos los objetos;

(b) ya "inaceptable": el nuevo peso total supera W y no decrecerá al añadir más objetos;

Búsqueda combinatoria, VIII

O bien: Mochila, VI

¿Podemos lograr valor total al menos V con peso no superior a W?

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Secuencia de decisiones: consideramos un objeto nuevo; o bien nos lo quedamos o bien lo descartamos.

(a) solución "completa" para el problema global: hemos considerado todos los objetos;

(b) ya "inaceptable": el nuevo peso total supera W y no decrecerá al añadir más objetos;

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Mochila, VII

Aplicando backtracking

```
def knapsack(weights, values, current_item, max_w, min_v):
  if current_item == -1:
    "all items considered, none left"
    if min_v <= 0:
      return [ list() ]
    else:
      return list()
  sols0 = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                   max_w, min_v)
  if weights[current_item] <= max_w:
    "current_item >= 0 is a valid item to consider next"
    sols1 = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                     max_w - weights[current_item],
                     min_v - values[current_item])
    sols0.extend(sol + [ current_item ] for sol in sols1)
  return sols0
```

Mochila, VIII

Sofisticaciones

En este ejemplo, la secuencia de decisiones que lleva al punto en que estamos se reduce a los nuevos valores de `max_w` y `min_v`. No es buena inspiración para problemas en que sea preciso tener en cuenta las decisiones ya tomadas.

Mochila, VIII

Sofisticaciones

En este ejemplo, la secuencia de decisiones que lleva al punto en que estamos se reduce a los nuevos valores de `max_w` y `min_v`. No es buena inspiración para problemas en que sea preciso tener en cuenta las decisiones ya tomadas.

¿Cómo podemos solucionarlo manteniendo explícitamente las decisiones tomadas?

Mochila, IX

Búsqueda exhaustiva con candidato explícito

```
def knapsack(weights, values, current_item,
             max_w, min_v, cand, cand_w, cand_v):
  if current_item == -1:
    if cand_v >= min_v and cand_w <= max_w:
      return [ cand ]
    else:
      return list()
  else:
    sols = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                    max_w, min_v, cand, cand_w, cand_v)
    sols.extend(knapsack(weights, values, current_item-1,
                    max_w, min_v,
                    cand + [ current_item ],
                    cand_w + weights[current_item],
                    cand_v + values[current_item]))
    return sols
```

Mochila, X

Backtracking con candidato explícito

```
def knapsack(weights, values, current_item, max_w, min_v,
             cand, cand_w, cand_v):
  if current_item == -1:
    if cand_v >= min_v and cand_w <= max_w:
      return [ cand ]
    else:
      return list()
  else:
    sols = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                    max_w, min_v, cand, cand_w, cand_v)
    if weights[current_item] <= max_w:
     sols.extend(knapsack(weights, values, current_item-1,
                    max_w, min_v,
                    cand + [ current_item ],
                    cand_w + weights[current_item],
                    cand_v + values[current_item]))
    return sols
```

Mochila, XI

Backtracking con candidato explícito, evitando copias

```
def knapsack(weights, values, current_item, max_w, min_v,
             cand, cand_w, cand_v):
  if current_item == -1:
    if cand_v >= min_v and cand_w <= max_w:
      return [ cand.copy() ]
    else: return list()
  else:
    sols = knapsack(weights, values, current_item - 1,
                    max_w, min_v, cand, cand_w, cand_v)
    if weights[current_item] <= max_w:
     cand.append(current_item)
     sols.extend(knapsack(weights, values, current_item-1,
                    max_w, min_v, cand,
                    cand_w + weights[current_item],
                    cand_v + values[current_item]))
     cand.pop() # backtracking happens here!
    return sols
```

Búsqueda combinatoria, IX

Existencia versus optimización

En el caso de problemas de optimización

(sea maximización o minimización) precisamos además

una función objetivo a optimizar,

- definida sobre candidatos a solución, pero
- de tal manera que se pueda extender de forma natural a los subproblemas locales (secuencias de decisiones).

Búsqueda combinatoria, X

O bien: Árboles de expansión, III

Árboles de expansión:

Secuencia de decisiones: el árbol crece en una arista más. . .

(a) ya "inaceptable": la nueva arista crea un ciclo,

(b) solución "completa" para el problema global: conecta todo,

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Función objetivo:

- peso del árbol parcial en curso?

Búsqueda combinatoria, X

O bien: Árboles de expansión, III

Árboles de expansión:

Secuencia de decisiones: el árbol crece en una arista más...

(a) ya "inaceptable": la nueva arista crea un ciclo,

(b) solución "completa" para el problema global: conecta todo,

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Función objetivo:

- peso del árbol parcial en curso?
- mejor peso posible para un árbol de expansión completo que extienda el árbol parcial en curso?

Búsqueda combinatoria, XI

O bien: Mochila, XII

Mochila, versión de optimización:

Lograr el máximo valor total con peso no superior a W.

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Búsqueda combinatoria, XI

O bien: Mochila, XII

Mochila, versión de optimización:

Lograr el máximo valor total con peso no superior a W.

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Secuencia de decisiones: consideramos un objeto nuevo; o bien nos lo quedamos o bien lo descartamos.

(a) ya "inaceptable": el nuevo peso total supera W;

(b) solución "completa" para el problema global: hemos considerado todos los objetos;

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Búsqueda combinatoria, XI

O bien: Mochila, XII

Mochila, versión de optimización:

Lograr el máximo valor total con peso no superior a W.

Subproblema: consideramos sólo un subconjunto de los objetos.

Secuencia de decisiones: consideramos un objeto nuevo; o bien nos lo quedamos o bien lo descartamos.

(a) ya "inaceptable": el nuevo peso total supera W;

(b) solución "completa" para el problema global: hemos considerado todos los objetos;

(c) "aceptable" pero aún "incompleta": todos los demás casos.

Función objetivo:

- valor de la mochila en curso?

Búsqueda combinatoria, XII

O bien: Mochila, XIII

Mochila, enfoque alternativo:

Lograr el menor peso posible con un valor de al menos V.

Búsqueda combinatoria, XII

O bien: Mochila, XIII

Mochila, enfoque alternativo:

Lograr el menor peso posible con un valor de al menos V.

Subproblema: dado el conjunto de objetos aún no descartados, descartar nuevos objetos.

(Lector: complete el esquema por su propia cuenta.)

Mochila, XIV

Problema de optimización por búsqueda exhaustiva

```
def slow_knapsack(weights, values, itq, limw):
  mx = 0
  best = None
  for cand in powerset(range(itq)):
    if total(weights, cand) <= limw:
      cmx = total(values, cand)
      if cmx > mx:
        best = cand
        mx = cmx
  return best, total(weights, best), total(values, best)
```

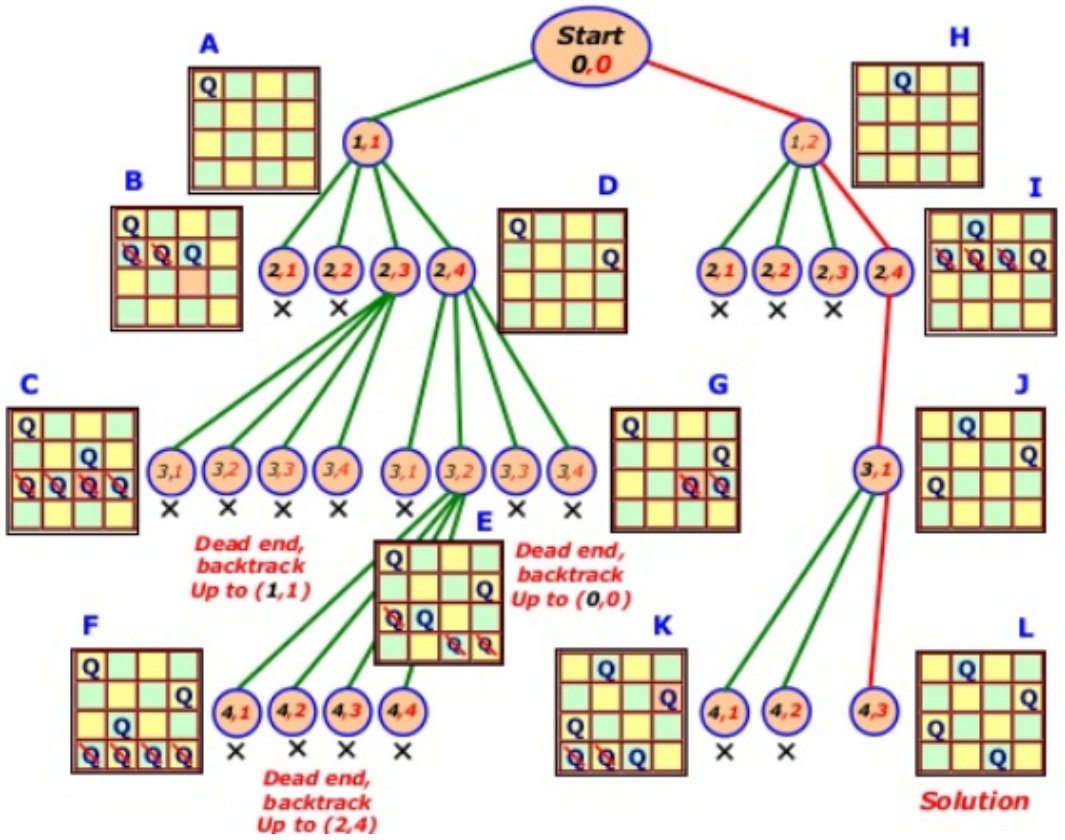
Mochila, XV

Problema de optimización por backtracking

```
def knapsack(weights, values, current_item, max_w):
  if current_item == -1:
    return ([],0,0)
  else:
    "current_item >= 0"
    best0, bestw0, bestv0 = knapsack(weights, values,
          current_item - 1, max_w)
    if weights[current_item] <= max_w:
      best1, bestw1, bestv1 = knapsack(weights, values,
          current_item - 1, max_w - weights[current_item])
      if bestv1 + values[current_item] > bestv0:
        best1.append(current_item)
        return (best1, bestw1 + weights[current_item],
                bestv1 + values[current_item])
  return best0, bestw0, bestv0
```

Ejemplo: *N-queens*, I

El árbol implícito: parte explorada hasta la primera solución



Fuente: `https://www.slideshare.net/praveenkumar33449138/02-problem-solvingsearchcontrol`

Ejemplo: *N-queens*, II

Busca todas las soluciones

```
def attempt(row, board, size):
  if row == size:
    board.draw()
  else:
    for column in range(size):
      if board.free(row, column):
        board.put_q(row, column)
        attempt(row + 1, board, size)
        board.remove_q(row, column)
```

Llamada inicial:

```
board = Board()
size = int(input("How many queens? "))
attempt(0, board, size)
```

Ejemplo: *N-queens*, III

Busca una solución

```
def attempt(row, board, size):
  if row == size:
    return True
  else:
    for column in range(size):
      if board.free(row, column):
        board.put_q(row, column)
        s = attempt(row + 1, board, size)
        if s:
          return True
        else:
          board.remove_q(row, column)
    return False
```

Ejemplo: *N-queens*, III

Busca una solución

```
def attempt(row, board, size):
  if row == size:
    return True
  else:
    for column in range(size):
      if board.free(row, column):
        board.put_q(row, column)
        s = attempt(row + 1, board, size)
        if s:
          return True
        else:
          board.remove_q(row, column)
    return False
```

Llamada inicial: declara el tablero, lee el tamaño, y llama así:

```
if attempt(0, board, size):
  board.draw()
```

Ejemplo: *N-queens*, IV

Por supuesto, podemos hacerlo mejor

Ideas a explorar:

- Simetrías: evita explorar una configuración que es, en esencia, "la misma" que una ya explorada.
- Adapta el orden en que se exploran las casillas de la fila en curso:
  - Cada casilla, si la usamos, ¿en cuánto nos reduce las posibilidades en las filas siguientes?
  - Exploramos primero las casillas que nos dejan más libertad para las filas siguientes, y dejamos las más restrictivas para después ("best-first search").
- ...

"Graph Colorability"

Dos variantes, sólo estudiamos una

"Vertex coloring":

Dado un grafo, asígnese un color a cada vértice de manera que no haya ninguna arista que conecte dos vértices del mismo color.

`http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/VertexColoring_750.gif`

"Edge coloring":

Dado un grafo, asígnese un color a cada arista de manera que no haya ningún vértice en que confluyan dos o más aristas del mismo color.

`http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/EdgeColoring_850.gif`

Hoy: "edge coloring".

Ejemplo: "3-colorability" en grafos 3-regulares, I

El árbol implícito: grafos con más y más aristas ya coloreadas

Restricción

Hoy, sólo grafos 3-regulares: todos los vértices tienen grado 3.

Enunciado:

Dado un grafo 3-regular G, asígnense colores a las aristas usando tres colores de manera que en cada vértice haya una arista de cada color.

Ideas para un esquema de "backtracking":

- Cada vértice del grafo implícito corresponde al grafo G con parte de las aristas ya coloreadas.

Ejemplo: "3-colorability" en grafos 3-regulares, I

El árbol implícito: grafos con más y más aristas ya coloreadas

Restricción

Hoy, sólo grafos 3-regulares: todos los vértices tienen grado 3.

Enunciado:

Dado un grafo 3-regular G, asígnense colores a las aristas usando tres colores de manera que en cada vértice haya una arista de cada color.

Ideas para un esquema de "backtracking":

- Cada vértice del grafo implícito corresponde al grafo G con parte de las aristas ya coloreadas.
- Vecinos de un vértice del grafo implícito: una arista más de G recibe color.

Ejemplo: "3-colorability" en grafos 3-regulares, I

El árbol implícito: grafos con más y más aristas ya coloreadas

Restricción

Hoy, sólo grafos 3-regulares: todos los vértices tienen grado 3.

Enunciado:

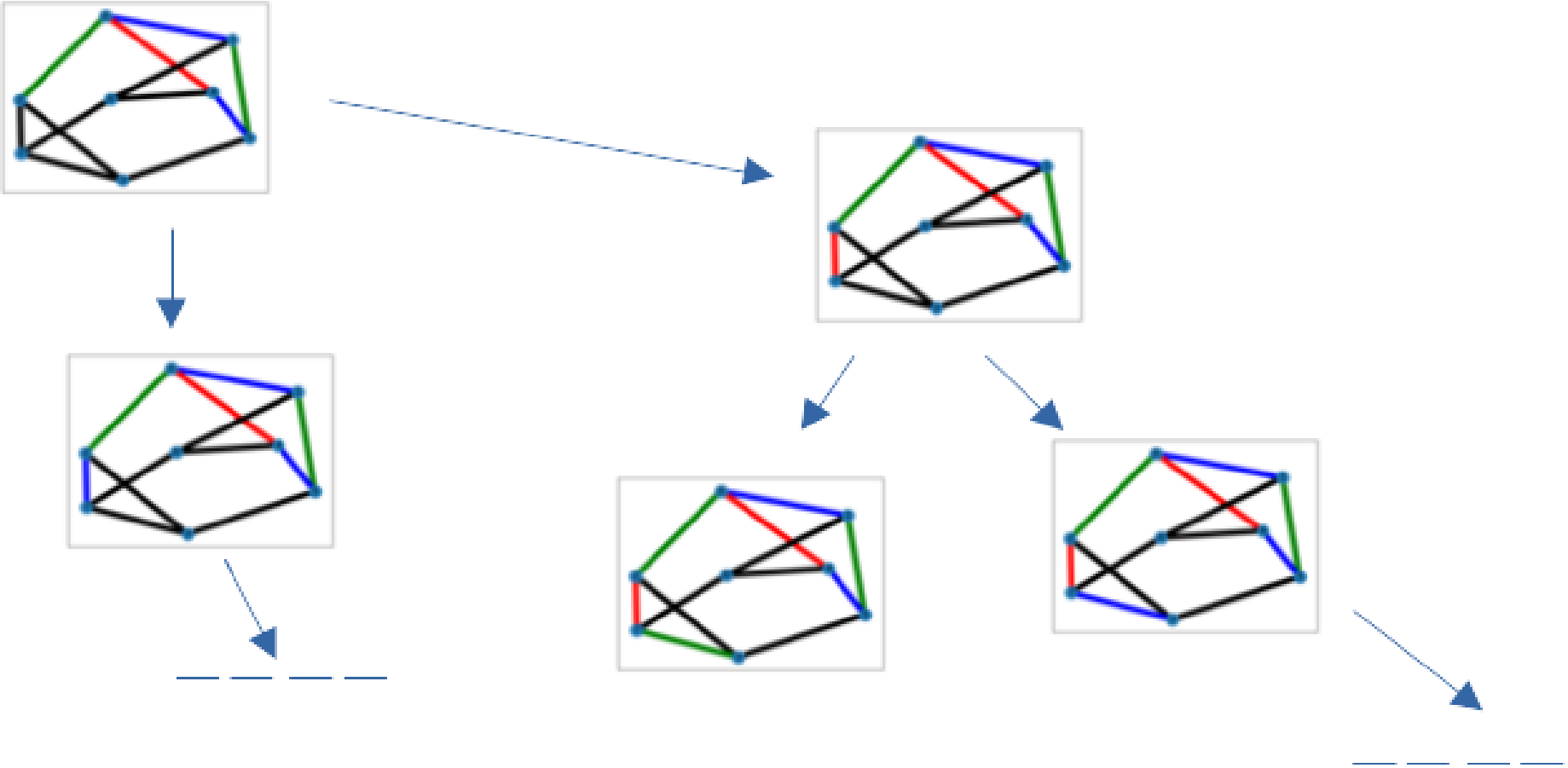
Dado un grafo 3-regular G, asígnense colores a las aristas usando tres colores de manera que en cada vértice haya una arista de cada color.

Ideas para un esquema de "backtracking":

- Cada vértice del grafo implícito corresponde al grafo G con parte de las aristas ya coloreadas.
- Vecinos de un vértice del grafo implícito: una arista más de G recibe color.
- ¿Cuál? Queremos asegurar que el grafo implícito es un árbol para evitar subproblemas repetidos.

Ejemplo: “3-colorability” en grafos 3-regulares, II

El árbol implícito (fragmento)



Ejemplo: “3-colorability” en grafos 3-regulares, III

Una opción de entre varias

Forzamos un orden sobre las aristas

y lo mantenemos estrictamente: si un camino del grafo implícito colorea primero la arista e_1 de G y después la arista e_2 de G, lo mismo ocurre en todos los caminos.

- Por ejemplo, “depth-first search” sobre G para marcar el orden.
- Eso asegura que, al colorear cada arista, al menos uno de los extremos ya ha gastado al menos un color.
- Además, el grafo implícito es un árbol: cada posible subproblema sólo se puede alcanzar de una manera.

Ejemplo: “3-colorability” en grafos 3-regulares, IV

Demo!

Basada en NetworkX y GraphViz:

- fijamos un orden de las aristas mediante la implementación de “depth-first search” de NetworkX;
- mantenemos el conjunto de colores disponibles en cada vértice;
- los vamos probando uno a uno y, con cada uno, lanzamos la llamada recursiva;
- Callejones sin salida: aristas para las que ya no quedan colores factibles.

Parafernalia adicional para informar de lo que va pasando y dibujar los grafos

(como el `dict gd` que mantiene el “layout” de GraphViz).

Ejemplo: "3-colorability" en grafos 3-regulares, V

El programa

```
def tricolor(g, edgelist):
  if not edgelist: return True
  else:
    u, v = edgelist.pop()
    possib = g.node[u]['free'] & g.node[v]['free']
    for c in possib:
      g.edges[u, v]['color'] = c
      g.nodes[u]['free'].remove(c)
      g.nodes[v]['free'].remove(c)
      success = tricolor(g, edgelist)
      if success: return True
      # else, free again the colors, try next possib
      g.edges[u, v]['color'] = noncolor
      g.nodes[u]['free'].add(c)
      g.nodes[v]['free'].add(c)
    edgelist.append((u, v)) # backtrack!
    return False
```

Ejemplo: “3-colorability” en grafos 3-regulares, VI

Desarrollos adicionales

Ideas:

- Fijamos los tres colores de un vértice concreto para evitar explorar subárboles que corresponden a permutar colores.

  (En general: identificamos simetrías y las usamos para evitar exploraciones innecesarias.)
- ¿Cómo sería la versión que nos da todas las soluciones?
- ¿Cómo tratar el problema cuando no suponemos 3-regularidad? Buscamos usar el mínimo de colores posible.
- Usando ideas similares, buscamos cómo plantear y resolver problemas de “vertex-coloring”. Variante de optimización: usar, de nuevo, el mínimo de colores posible.
- ...

Algoritmos “greedy”, I

Como pronto veremos, ya conocemos ejemplos

Característica:

- La siguiente decisión es siempre “la que mejor parece” para el subproblema en curso;
- se toma esa decisión y nunca se reconsidera:

  no existe “backtracking”.
- Dado que, en ese momento, no se tiene perspectiva del problema global, esa decisión es arriesgada.
- Por tanto, se necesita una argumentación adicional, separada del algoritmo, que explique por qué es buena idea hacerlo así.

Algoritmos “greedy”, II

El principio “greedy” a argumentar en cada ocasión

“Greedy-choice property”:

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

Algoritmos “greedy”, II

El principio “greedy” a argumentar en cada ocasión

“Greedy-choice property”:

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

¿Cuándo hemos visto esto antes?

Algoritmos “greedy”, II

El principio “greedy” a argumentar en cada ocasión

“Greedy-choice property”:

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

¿Cuándo hemos visto esto antes?

- Algoritmo de Dijkstra (single-source shortest paths),

Algoritmos "greedy", II

El principio "greedy" a argumentar en cada ocasión

"Greedy-choice property":

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

¿Cuándo hemos visto esto antes?

- Algoritmo de Dijkstra (single-source shortest paths),
- algoritmo de Kruskal para encontrar árboles de expansión mínimos...

`https://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_algorithm`.

Algoritmos “greedy”, III

O bien: Mochila, XVI

¿Obtendremos una solución óptima al aplicar el esquema “greedy” al problema de la mochila?

Algoritmos “greedy”, III

O bien: Mochila, XVI

¿Obtendremos una solución óptima al aplicar el esquema “greedy” al problema de la mochila?

- Objetos indivisibles: NO.

Algoritmos “greedy”, III

O bien: Mochila, XVI

¿Obtendremos una solución óptima al aplicar el esquema “greedy” al problema de la mochila?

- Objetos indivisibles: NO.
- Objetos divisibles: SÍ.
- A condición de poner un poco de cuidado en definir “decisión óptima”.

Algoritmos "greedy", III

O bien: Mochila, XVI

¿Obtendremos una solución óptima al aplicar el esquema "greedy" al problema de la mochila?

- Objetos indivisibles: NO.
- Objetos divisibles: SÍ.
- A condición de poner un poco de cuidado en definir "decisión óptima".
- Incluso para objetos indivisibles, nos da una información útil: una cota superior sobre el valor que se puede obtener a partir de un subproblema local.
- Si esa aproximación nos indica que un subproblema local no puede proporcionar una solución mejor que la mejor que se tiene hasta el momento, nos lo podemos ahorrar.

Algoritmos “greedy”, IV

O bien: Árboles de expansión, IV

`https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Kruskal`

- Kruskal es un ejemplo clásico de algoritmo “greedy”.
- Proporciona un árbol de expansión minimal sólo al final: durante el proceso, se tienen fragmentos inconexos.
- Existe un algoritmo similar, pero en el cual siempre mantenemos un árbol de expansión conexo pero incompleto durante el proceso.
- ¿Lograrás diseñar este algoritmo por ti mism@? (NO busques en la Wikipedia “algoritmo de Prim” hasta haber completado tu propia solución.)

Giving change, I

O bien: Algoritmos "greedy", V

Dadas las denominaciones de determinadas monedas
(y provisión tan amplia de cada moneda como sea precisa),

- digamos, $d_1, \ldots, d_n$,
- y una cantidad concreta a alcanzar exactamente, M:
- ¿cómo lograrlo?

Relación con "la mochila" y con "Subset sum":

- Objetos "repetidos", podemos tomar cuantos queramos de cada tipo, y
- no hay pesos, pero la cantidad objetivo se ha de alcanzar exacta.

Giving change, II

O bien: Algoritmos "greedy", VI

Vamos tomando monedas de la denominación más elevada posible hasta alcanzar la cantidad deseada.

- Para muchas denominaciones, el algoritmo "greedy" funciona (es decir, da una solución con el mínimo número de monedas).
- Se llaman "canonical coin systems".
- Incluyen los casos típicos de la mayoría de los países:
  - 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200;
  - 1, 5, 10, 25, 50, 100;
  - 1, 29, 493;
  - ...
- Para otras denominaciones, no siempre!

`https://en.wikipedia.org/wiki/Change-making_problem`.

Giving change, III

O bien: Algoritmos "greedy", VI

- ¿Cómo se expresa el problema "giving change" en los términos de los esquemas de búsqueda combinatoria que hemos indicado anteriormente?
- Las denominaciones 1, 5, 10, 25 (las monedas de dólar de curso habitual) forman un "canonical coin system". Resuelve "giving change" en dólares mediante un algoritmo "greedy"
- Plantea y resuelve el mismo problema con las denominaciones del sistema euro, completo: Jutge P81629 en la lista Combinatorial Search Schemes (II).
- Encuentra casos en que el enfoque "greedy" no de la solución óptima.
- ¿Cómo obtener optimalidad en todos los casos?
  - "Backtracking" es siempre una opción.
  - Después del parcial veremos que será preferible Programación Dinámica.

Programación Dinámica, I

Lectura recomendada: `orígenes` por Richard Bellman en persona

Recordemos ("greedy-choice property"):

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

Programación Dinámica, I

Lectura recomendada: `orígenes` por Richard Bellman en persona

Recordemos ("greedy-choice property"):

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

Puntos clave hacia la Programación Dinámica:

- Es difícil, o imposible, argumentar cuál de las decisiones locales, óptima o no, llevará a la solución globalmente óptima:

  el mantra "greedy" es frecuentemente inaplicable;

Programación Dinámica, I

Lectura recomendada: `orígenes` por Richard Bellman en persona

Recordemos ("greedy-choice property"):

Toda decisión válida que sea óptima para el subproblema local es también óptima para el problema global.

Puntos clave hacia la Programación Dinámica:

- Es difícil, o imposible, argumentar cuál de las decisiones locales, óptima o no, llevará a la solución globalmente óptima:

  el mantra "greedy" es frecuentemente inaplicable;

- sin embargo, a veces, un primo suyo tal vez sea cierto, a saber, el Principio de Optimalidad de Bellman:

  la parte de la solución globalmente óptima que corresponde a cualquier subproblema local es, a su vez, una solución localmente óptima.

- Ejemplo: "Giving change".

Programación Dinámica, II

Modus operandi más habitual

Programación Dinámica tabulada:

- Organiza los subproblemas y sus soluciones óptimas en forma de tabla.
- Inventa y justifica una regla para llenar cada entrada de esa tabla,
- a partir de entradas de la tabla que sabes que puedes haber logrado llenar antes.
- Frecuentemente parece, a primera vista, ineficiente; pero no lo es tanto, y suele admitir además mejoras *ad-hoc*.
- (La Programación Dinámica no siempre es tabulada; pero en este curso sólo tratamos la variante tabulada.)

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".
- Y con tantas columnas como indica la cantidad final M a obtener (o la más alta si se quiere poder usar la misma tabla para varios casos), más una.

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".
- Y con tantas columnas como indica la cantidad final M a obtener (o la más alta si se quiere poder usar la misma tabla para varios casos), más una.
- La entrada $T[i, h]$ indica cuántas monedas se usan para obtener la cantidad $h \geq 0$, pero usando solamente las $i \geq 0$ denominaciones de moneda más pequeñas.

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".
- Y con tantas columnas como indica la cantidad final M a obtener (o la más alta si se quiere poder usar la misma tabla para varios casos), más una.
- La entrada $T[i, h]$ indica cuántas monedas se usan para obtener la cantidad $h \geq 0$, pero usando solamente las $i \geq 0$ denominaciones de moneda más pequeñas.

$$T[i, h] =$$

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".
- Y con tantas columnas como indica la cantidad final M a obtener (o la más alta si se quiere poder usar la misma tabla para varios casos), más una.
- La entrada $T[i, h]$ indica cuántas monedas se usan para obtener la cantidad $h \geq 0$, pero usando solamente las $i \geq 0$ denominaciones de moneda más pequeñas.

$$T[i, h] = \min(\ T[i-1, h],\ 1 + T[i, h - d_i]\ ).$$

Giving change, IV

Cuando tus "monedas" no permiten solución "greedy"

En el ejemplo "giving change", primer planteamiento:

- Tabla T con tantas filas como denominaciones de moneda distintas, más una: "número de denominaciones en uso".
- Y con tantas columnas como indica la cantidad final M a obtener (o la más alta si se quiere poder usar la misma tabla para varios casos), más una.
- La entrada $T[i, h]$ indica cuántas monedas se usan para obtener la cantidad $h \geq 0$, pero usando solamente las $i \geq 0$ denominaciones de moneda más pequeñas.

$$T[i, h] = \min(\ T[i-1, h],\ 1 + T[i, h - d_i]\ ).$$

si $i > 0$ y $h \geq d_i$.

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0, h]$? En particular $T[0, 0]$...

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0, h]$? En particular $T[0, 0]$...

  $T[0, 0] = 0$

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$
- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $$T[0,0] = 0$$

- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $$T[0,h] = \texttt{float("inf")}$$

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $$T[0,0] = 0$$

- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $$T[0,h] = \texttt{float("inf")}$$

- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$

- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $T[0,h] =$ `float("inf")`

- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

  En las posiciones 1 en adelante de una lista, `denoms`,

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$
- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $T[0,h] =$ `float("inf")`
- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

  En las posiciones 1 en adelante de una lista, `denoms`,

  evitando d_0.

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$
- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $T[0,h] =$ `float("inf")`
- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

  En las posiciones 1 en adelante de una lista, `denoms`, evitando d_0.
- Las necesitaremos ordenar.

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$
- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $T[0,h] =$ `float("inf")`
- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

  En las posiciones 1 en adelante de una lista, `denoms`, evitando d_0.
- Las necesitaremos ordenar.

  ¿Qué "placeholder" podemos poner en `denoms[0]`?

Giving change, V

Muchos detalles a los que prestar atención

¿Significado preciso de las filas?

¡Afecta a la indexación de la lista de denominaciones!

- ¿$T[0,h]$? En particular $T[0,0]$...

  $T[0,0] = 0$
- $T[0,h]$ ha de indicar "imposible" para $h > 0$. ¿Qué haremos con esas entradas?

  $T[0,h] =$ `float("inf")`
- ¿Dónde nos convienen las denominaciones?

  En las posiciones 1 en adelante de una lista, `denoms`, evitando d_0.
- Las necesitaremos ordenar.

  ¿Qué "placeholder" podemos poner en `denoms[0]`?

```
denoms[0] = float("-inf")
```

Giving change, VI

```
def gcdptable(denoms, upper_lim):
  t = {}
  for quantity in range(upper_lim + 1):
    "init table for no coins"
    t[0, quantity] = float("inf")
  t[0, 0] = 0
  for denom in range(1, len(denoms)):
    for quantity in range(upper_lim + 1):
      if denoms[denom] <= quantity:
        "shall we use one more denoms[denom] coin?"
        t[denom, quantity] = min(
            t[denom - 1, quantity],
            1 + t[denom, quantity - denoms[denom]] )
      else:
        "cannot use that denomination anymore"
        t[denom, quantity] = t[denom - 1, quantity]
  return t
```

Giving change, VII

Pero, ¿cuál es realmente la solución completa?

Giving change, VII

Pero, ¿cuál es realmente la solución completa?

```
def trace(gctab, denoms, q):
  r = Counter()
  d = len(denoms) - 1
  while q:
    "non-generalizable: we can tell which case of the two"
    if d == 0:
      "only unit coins are used now"
      r[denoms[d]] += q
      break
    elif gctab[d, q] == gctab[d-1, q]:
      "coins of denoms[d] units were not employed"
      d -= 1
    else:
      r[denoms[d]] += 1
      q -= denoms[d]
  return r
```

Giving change, VIII

¿Realmente necesitamos toda la tabla?

¿Ha de estar siempre presente la denominación 1?

Condición necesaria y suficiente para poder resolver todos los casos.

- ¿Podemos simplificar la estructura de datos?
- Muchas veces, la manera de simplificar el programa es simplificar la estructura de datos.
- ¿Necesitamos tener siempre todas las filas?

Giving change, VIII

¿Realmente necesitamos toda la tabla?

¿Ha de estar siempre presente la denominación 1?

Condición necesaria y suficiente para poder resolver todos los casos.

- ¿Podemos simplificar la estructura de datos?
- Muchas veces, la manera de simplificar el programa es simplificar la estructura de datos.
- ¿Necesitamos tener siempre todas las filas?
- ¡En cada momento, nos basta tener la que estamos calculando!

Giving change, IX

```
dptable = [float("inf")]*(upper_lim + 1)
dptable[0] = 0
for i in range(1, upper_lim + 1):
   "dptable[i]: how many coins needed to add up to i"
   for coin in coins:
      "try using it"
      if coin <= i:
         dptable[i] = min(dptable[i], 1 + dptable[i-coin])
```

Calculando la tabla así, `dptable[h] > upper_lim` significa que no es posible alcanzar h, de lo cual informamos apropiadamente.

En otro caso, la solución está en `dptable[h]`.

Giving change, X

Para conservar la solución completa

Cada vez que se modifica la tabla principal, se anota el motivo del cambio en una tabla secundaria:

```
for coin in coins:
    if coin <= i:
        if 1 + dptable[i - coin] <= dptable[i]:
            dptable[i] = 1 + dptable[i - coin]
            best[i] = coin
```

¡Idea generalizable!

Giving change, XI

Para reconstruir la solución completa

Usando luego `best` (un `dict`), la reconstruimos así:

```
def trace(best, goal):
    coins = list()
    while goal:
        used = best[goal]
        coins.append(used)
        goal -= used
    return coins
```

Las listas de Python, I

Breve aviso

- Muy ágiles en modificaciones sobre el extremo superior:

  `ls.pop()`.
- Lentas en modificaciones en cualquier otro punto:

  `ls.pop(0)`, `ls[1:]`.
- Procuraremos evitar modificarlas lejos del extremo superior:

  P. ej.: ¿basta con un índice que nos marque la zona de interés?
- Si necesitamos inevitablemente modificar la lista en índices intermedios, quizá merece la pena pensar si no será mejor un `dict()`.
- Si necesitamos inevitablemente modificar la lista en índices de los extremos, pero en ambos extremos, consideramos

  `from collections import deque`.

Las listas de Python, II

Tiempo y uso de memoria según crecen o decrecen

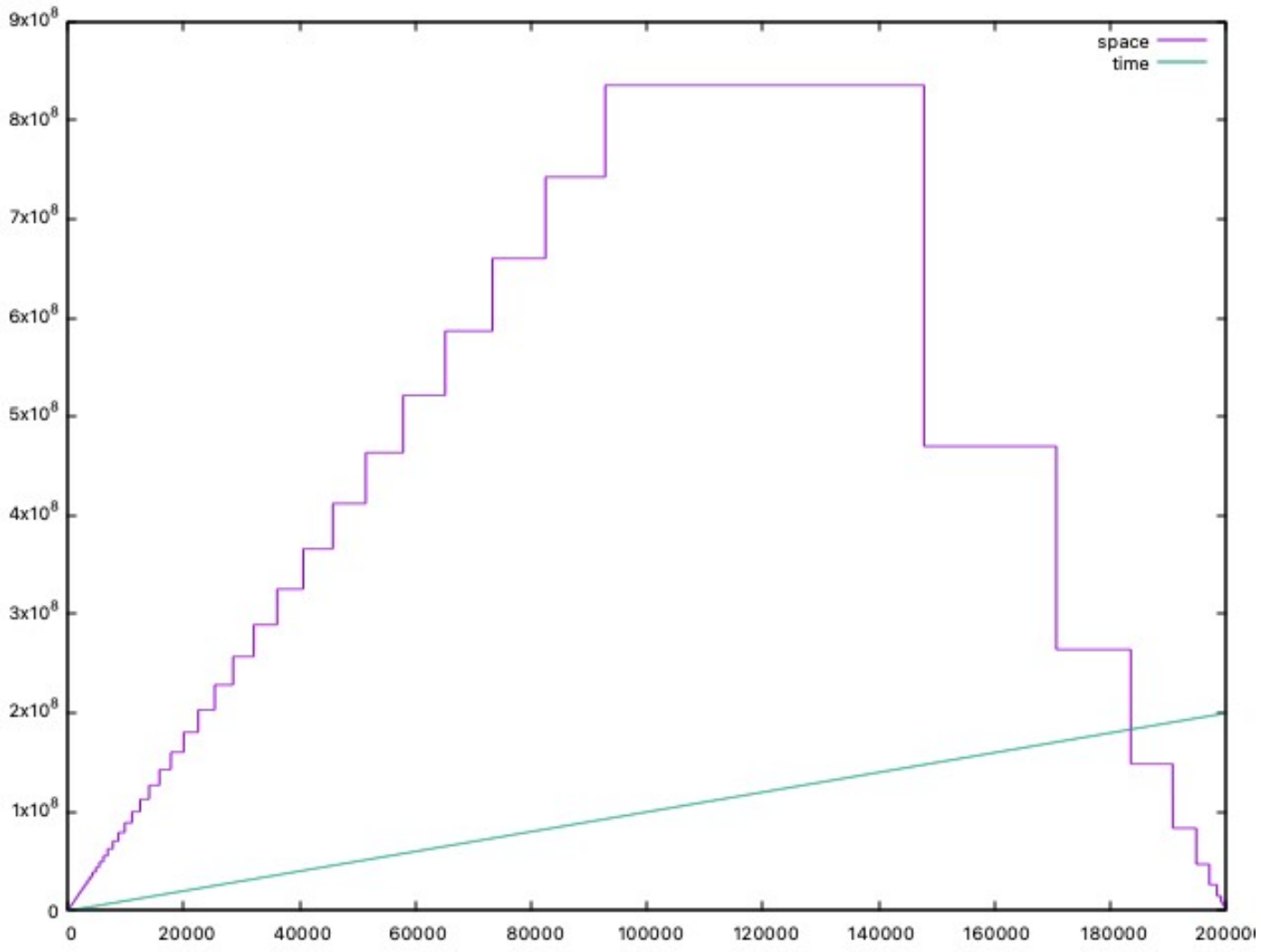


Imagen proporcionada por: Jordi Petit, UPC

Mochila, XVI

Brevísimamente

La mochila, ¿por Programación Dinámica?

Mochila, XVI

Brevísimamente

La mochila, ¿por Programación Dinámica?

- ¿Qué representa cada dimensión de la tabla?
- ¿Qué representa el contenido de las casillas?
- ¿Cómo queda entonces la correspondiente ecuación de Bellman?

Mochila, XVI

Brevísimamente

La mochila, ¿por Programación Dinámica?

- ¿Qué representa cada dimensión de la tabla?
- ¿Qué representa el contenido de las casillas?
- ¿Cómo queda entonces la correspondiente ecuación de Bellman?

$$T[i,h] = \max(\ T[i-1,h],\ v_i + T[i-1,h-w_i]\ )$$

...a condición de que...

Mochila, XVI

Brevísimamente

La mochila, ¿por Programación Dinámica?

- ¿Qué representa cada dimensión de la tabla?
- ¿Qué representa el contenido de las casillas?
- ¿Cómo queda entonces la correspondiente ecuación de Bellman?

$$T[i,h] = \max(\ T[i-1,h],\ v_i + T[i-1,h-w_i]\ )$$

...a condición de que...

$$w_i \leq h$$

Mochila, XVI

Brevísimamente

La mochila, ¿por Programación Dinámica?

- ¿Qué representa cada dimensión de la tabla?
- ¿Qué representa el contenido de las casillas?
- ¿Cómo queda entonces la correspondiente ecuación de Bellman?

$$T[i,h] = \max(\ T[i-1,h],\ v_i + T[i-1,h-w_i]\ )$$

...a condición de que...

$$w_i \leq h$$

A completar mediante cuidadosa consideración de las *boundary conditions*.

Supersecuencias, I

Conecta con aplicaciones en Bioinformática

Dadas dos secuencias (por ejemplo *strings*), ¿cuál es la secuencia más corta posible que tiene a ambas como subsecuencias?

(O una de ellas en caso de que haya varias.)

Supersecuencias, I

Conecta con aplicaciones en Bioinformática

Dadas dos secuencias (por ejemplo *strings*), ¿cuál es la secuencia más corta posible que tiene a ambas como subsecuencias?

(O una de ellas en caso de que haya varias.)

Como antes, empezamos por calcular solamente su longitud; añadimos luego código para trazar la supersecuencia solución.

Supersecuencias, I

Conecta con aplicaciones en Bioinformática

Dadas dos secuencias (por ejemplo *strings*), ¿cuál es la secuencia más corta posible que tiene a ambas como subsecuencias?

(O una de ellas en caso de que haya varias.)

Como antes, empezamos por calcular solamente su longitud; añadimos luego código para trazar la supersecuencia solución.

Si `r` es una de las supersecuencias comunes mínimas de `s` y `t`, ¿qué podemos averiguar sobre `r`?

Supersecuencias, II

Consideraciones

1. ¿Cómo serían los casos de secuencias de entrada vacías?

Supersecuencias, II

Consideraciones

1. ¿Cómo serían los casos de secuencias de entrada vacías?
2. ¿Cómo sería un caso en que ambas secuencias empiezan por la misma letra?
   - Entonces el resultado también.
   - Y el resto del resultado es...

Supersecuencias, II

Consideraciones

1. ¿Cómo serían los casos de secuencias de entrada vacías?
2. ¿Cómo sería un caso en que ambas secuencias empiezan por la misma letra?
   - Entonces el resultado también.
   - Y el resto del resultado es... un subproblema con secuencias más cortas.
3. Queda pendiente el caso de que las primeras letras de las dos secuencias sean diferentes.
   - Entonces el resultado ha de empezar por una de ellas.
   - Y el resto del resultado es...

Supersecuencias, II

Consideraciones

1. ¿Cómo serían los casos de secuencias de entrada vacías?
2. ¿Cómo sería un caso en que ambas secuencias empiezan por la misma letra?
   - Entonces el resultado también.
   - Y el resto del resultado es... un subproblema con secuencias más cortas.
3. Queda pendiente el caso de que las primeras letras de las dos secuencias sean diferentes.
   - Entonces el resultado ha de empezar por una de ellas.
   - Y el resto del resultado es... un subproblema con una secuencia mantenida igual y la otra más corta.

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Si `s[i] == t[j]`:

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Si `s[i] == t[j]`: `1 + S[i+1, j+1]`.

Si `s[i] != t[j]`:

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Si `s[i] == t[j]`: `1 + S[i+1, j+1]`.

Si `s[i] != t[j]`: `1 + min(S[i+1, j], S[i, j+1])`.

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Si `s[i] == t[j]`: `1 + S[i+1, j+1]`.

Si `s[i] != t[j]`: `1 + min(S[i+1, j], S[i, j+1])`.

Boundary conditions: cuando `s[i:]` y/o `t[j:]` es vacía.

Supersecuencias, III

Tabla bidimensional

`S[i, j]`:

longitud de la supersecuencia más corta de `s[i:]` y `t[j:]`.

Si `s[i] == t[j]`: `1 + S[i+1, j+1]`.

Si `s[i] != t[j]`: `1 + min(S[i+1, j], S[i, j+1])`.

Boundary conditions: cuando `s[i:]` y/o `t[j:]` es vacía.

Ojo! Esta vez, las entradas de la tabla dependen de otras entradas con índices superiores.

Supersecuencias, IV

Aproximación al programa

```
initialize
for i in reversed(range(len(s))):
    for j in reversed(range(len(t))):
        if s[i] == t[j]:
            S[i, j] = 1 + S[i+1, j+1]
        else:
            S[i, j] = 1 + min(S[i+1, j], S[i, j+1])
return S[0, 0]
```

Supersecuencias, V

Cómo trazar la solución

Método general: tabla secundaria que indica, para cada `i` y `j`, en caso de ser diferentes las letras `s[i]` y `t[j]`, si hemos de tomar en ese punto la letra de `s` o la de `t`.

Para construirla, en el caso `s[i] != t[j]` reemplazamos la operación `min` por una comprobación de desigualdad y apuntamos en la tabla secundaria de cuál de los dos strings dados viene la letra a usar (por ejemplo, con los valores -1 o 1, reservando el cero para cuando `s[i] == t[j]`).

Es también posible tomar la decisión mediante comparaciones del estilo de `S[i, j] == 1 + S[i+1, j]` sobre la tabla principal.

Caminos mínimos, I

¿Aristas con costes? ¿Pueden ser negativos?

Problemas de caminos mínimos en grafos

Muy comunes: muchos problemas prácticos se pueden modelar así.

Empezamos por el caso "single-source": el vértice inicial de todos los caminos es fijo. El grafo es dirigido.

- ¿Costes variables en los arcos, o todos iguales?

  Si todos son iguales, ¡Breadth-First Search!
- ¿Hay arcos con costes negativos?
- Si no: Dijkstra (o extensiones como A*).
- Si los hay... ¿hay un ciclo de coste total negativo?

  En ese caso, el problema se complica. Solucionado muy recientemente.
- Si no los hay: Bellman-Ford:

Caminos mínimos, I

¿Aristas con costes? ¿Pueden ser negativos?

Problemas de caminos mínimos en grafos

Muy comunes: muchos problemas prácticos se pueden modelar así.

Empezamos por el caso "single-source": el vértice inicial de todos los caminos es fijo. El grafo es dirigido.

- ¿Costes variables en los arcos, o todos iguales?

  Si todos son iguales, ¡Breadth-First Search!
- ¿Hay arcos con costes negativos?
- Si no: Dijkstra (o extensiones como A*).
- Si los hay... ¿hay un ciclo de coste total negativo?

  En ese caso, el problema se complica. Solucionado muy recientemente.
- Si no los hay: Bellman-Ford:

  Un fragmento de un camino mínimo... ¡es mínimo!

Caminos mínimos, I

¿Aristas con costes? ¿Pueden ser negativos?

Problemas de caminos mínimos en grafos

Muy comunes: muchos problemas prácticos se pueden modelar así.

Empezamos por el caso "single-source": el vértice inicial de todos los caminos es fijo. El grafo es dirigido.

- ¿Costes variables en los arcos, o todos iguales?

  Si todos son iguales, ¡Breadth-First Search!
- ¿Hay arcos con costes negativos?
- Si no: Dijkstra (o extensiones como A*).
- Si los hay... ¿hay un ciclo de coste total negativo?

  En ese caso, el problema se complica. Solucionado muy recientemente.
- Si no los hay: Bellman-Ford:

  Un fragmento de un camino mínimo... ¡es mínimo!

  ¡Incluso en presencia de costes negativos!

Caminos mínimos, II

Si el Principio de Optimalidad se cumple...

Grafo dirigido de n vértices, vértice inicial s: "tabulamos" la distancia `dist[v, i]` de s a v en, como mucho, i pasos.

Si `dist[v, i]` es óptima y el último arco es (u, v), entonces `dist[u, i-1]` necesariamente es óptima.

$$dist[v, i] = \min(dist[v, i-1], dist[u, i-1] + cost[u, v])$$

Caminos mínimos, II

Si el Principio de Optimalidad se cumple...

Grafo dirigido de n vértices, vértice inicial s: "tabulamos" la distancia `dist[v, i]` de s a v en, como mucho, i pasos.

Si `dist[v, i]` es óptima y el último arco es (u, v), entonces `dist[u, i-1]` necesariamente es óptima.

$$dist[v, i] = \min(dist[v, i-1], dist[u, i-1] + cost[u, v])$$

```
for all v in V:
   dist[v] = float('inf')

dist[s] = 0
for i in range(1, n):
   for all the edges (u, v):
     if dist[v] > dist[u] + cost[u,v]:
       dist[v] = dist[u] + cost[u, v]
```

Caminos mínimos, II

Si el Principio de Optimalidad se cumple...

Grafo dirigido de n vértices, vértice inicial s: "tabulamos" la distancia `dist[v, i]` de s a v en, como mucho, i pasos.

Si `dist[v, i]` es óptima y el último arco es (u, v), entonces `dist[u, i-1]` necesariamente es óptima.

$$dist[v, i] = \min(dist[v, i-1], dist[u, i-1] + cost[u, v])$$

```
for all v in V:          # Bellman-Ford en PA2
   dist[v] = float('inf')
   prev[v] = None
dist[s] = 0
for i in range(1, n):
   for all the edges (u, v):
     if dist[v] > dist[u] + cost[u,v]:
       dist[v] = dist[u] + cost[u, v]
       prev[v] = u
```

Caminos mínimos, III

¿Qué es lo que decidimos considerar un subproblema?

"All-pairs shortest paths":

Dado un grafo (dirigido o no), ¿cuáles son las distancias más cortas entre todos los pares de vértices?

- Puede haber costes negativos, pero no ciclos de coste total negativo.
- Vértices de 0 a $N-1$,
- subproblemas definidos por un segmento inicial de esa secuencia de vértices;
- sólo se permiten los vértices de ese segmento inicial como vértices intermedios de un camino.
- Inicialmente: segmento nulo, no se permiten vértices como pasos intermedios; la distancia viene dada por los arcos individuales: si desde un vértice se alcanza directamente otro.

Caminos mínimos, IV

¡Recordemos comprobar el Principio de Optimalidad!

Esencia del algoritmo de `Floyd(-Warshall(-Roy))`:

- Si ya tenemos en nuestra tabla de distancias todas las que sólo usan vértices intermedios anteriores a k:

  ¿Cómo las usamos para contar también con k?

- La nueva opción k se usará o bien cero veces, ¡o bien exactamente una!

Caminos mínimos, IV

¡Recordemos comprobar el Principio de Optimalidad!

Esencia del algoritmo de `Floyd(-Warshall(-Roy))`:

- Si ya tenemos en nuestra tabla de distancias todas las que sólo usan vértices intermedios anteriores a k:

  ¿Cómo las usamos para contar también con k?

- La nueva opción k se usará o bien cero veces, ¡o bien exactamente una!

$$\begin{aligned} \text{dist(i, j, k)} = \min(\ & \text{dist(i, j, k-1)}, \\ & \text{dist(i, k, k-1)} + \text{dist(k, j, k-1)}\ ) \end{aligned}$$

Caminos mínimos, IV

¡Recordemos comprobar el Principio de Optimalidad!

Esencia del algoritmo de `Floyd(-Warshall(-Roy))`:

- Si ya tenemos en nuestra tabla de distancias todas las que sólo usan vértices intermedios anteriores a k:

  ¿Cómo las usamos para contar también con k?

- La nueva opción k se usará o bien cero veces, ¡o bien exactamente una!

$$\begin{aligned}\text{dist(i, j, k)} = \min(\ & \text{dist(i, j, k-1)}, \\ & \text{dist(i, k, k-1)} + \text{dist(k, j, k-1)}\ )\end{aligned}$$

- Y si pasar por k es preferible, anotamos en la tabla secundaria que el mejor camino de i a j pasa por k.
- La tabla secundaria permite reconstruir recursivamente los caminos mínimos si se necesitan.

  (Existe una opción alternativa para esta reconstrucción: véase el enlace a Wikipedia dado arriba.)

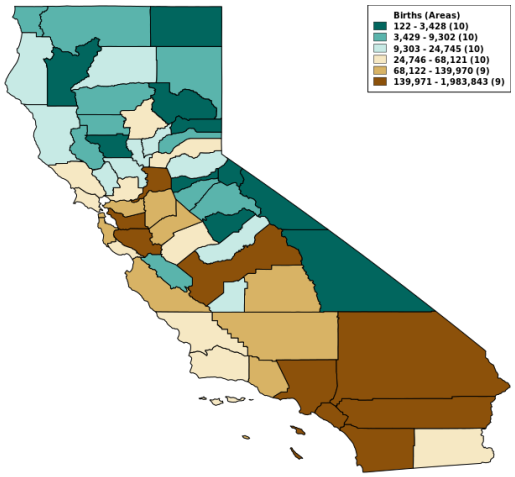
Discretización no supervisada

"Unsupervised Discretization" o "One-Dimensional Clustering"

Dada una lista de `float`'s, hay que particionarla en un número reducido de segmentos ("bins", "buckets", "clusters"...).

Resuelto (si que casi nadie se enterase) por los cartógrafos en la rama de cartografía llamada `choropleth maps`; la solución que describimos ahora, ellos la llaman `Jenks' natural breaks`.

Es un caso particular de la segmentación por "K-Means".



(Fuente: `Expert Health Data Programming, Inc (EHDP): Vitalnet`)

Segmentación por "K-Means"

"Clustering" que sigue el criterio de minimizar el error cuadrático

El caso general:

Con vectores de números reales en dimensión d.

- Datos: n vectores x_i, entero positivo k;
- Resultado: particionar los vectores en k clusters C_j;
- representaremos cada "cluster" C_j por un vector c_j (su centroide);
- los centroides han de minimizar el error cuadrático medio:

$$\frac{1}{n}\sum_{j}\sum_{x_i\in C_j} d(x_i, c_j)^2$$

Nota:

No exigimos que los c_j se escojan de entre los datos x_i.

Segmentación por "K-Means"

"Clustering" que sigue el criterio de minimizar el error cuadrático

El caso general:

Con vectores de números reales en dimensión d.

- Datos: n vectores x_i, entero positivo k;
- Resultado: particionar los vectores en k clusters C_j;
- representaremos cada "cluster" C_j por un vector c_j (su centroide);
- los centroides han de minimizar el error cuadrático medio:

$$\frac{1}{n}\sum_j \sum_{x_i \in C_j} d(x_i, c_j)^2$$

Nota:

No exigimos que los c_j se escojan de entre los datos x_i.

Malas noticias: *NP-hard* para dimensión 2 o más.

Y, ¿cómo lo resuelve la gente?

Si por milagro tuviéramos los centroides:

Entonces es fácil encontrar los "clusters": cada punto va a su centroide más próximo, porque, si no, el error crece.

Y, ¿cómo lo resuelve la gente?

Si por milagro tuviéramos los centroides:

Entonces es fácil encontrar los "clusters": cada punto va a su centroide más próximo, porque, si no, el error crece.

Si por milagro tuviéramos los "clusters":

Entonces es fácil encontrar los centroides: minimizamos $\sum_{x_i \in C} d(x_i, c)^2$ forzando la derivada a cero; el resultado (no podía ser otro) es que cada centroide queda en el baricentro de su "cluster" porque, si no, el error crece.

La heurística de Lloyd

Mucha gente la llama K-Means, confundiendo el problema con la solución aproximada

Vamos alternando

entre las dos cosas que sabemos hacer, empezando por k candidatos iniciales a centroide:

- recalcular los "clusters",
- recalcular los centroides,
- repetir.

`https://www.naftaliharris.com/blog/visualizing-k-means-clustering/`

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

Tabulamos: $C[i, m]$, coste de un "clustering" de los puntos x_1 to x_i en m "clusters", para $m \leq k$ y $m \leq i$; la solución está en $C[n, k]$.

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

Tabulamos: $C[i, m]$, coste de un "clustering" de los puntos x_1 to x_i en m "clusters", para $m \leq k$ y $m \leq i$; la solución está en $C[n, k]$.

Inicialización: $C[i, m] = 0$ si $m = 0$.

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

Tabulamos: $C[i, m]$, coste de un "clustering" de los puntos x_1 to x_i en m "clusters", para $m \leq k$ y $m \leq i$; la solución está en $C[n, k]$.

Inicialización: $C[i, m] = 0$ si $m = 0$.

¿Relación con "un cluster menos"? Identificamos el punto más pequeño del último "cluster".

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

Tabulamos: $C[i, m]$, coste de un "clustering" de los puntos x_1 to x_i en m "clusters", para $m \leq k$ y $m \leq i$; la solución está en $C[n, k]$.

Inicialización: $C[i, m] = 0$ si $m = 0$.

¿Relación con "un cluster menos"? Identificamos el punto más pequeño del último "cluster".

K-Means: mínimo global en dimension 1, I

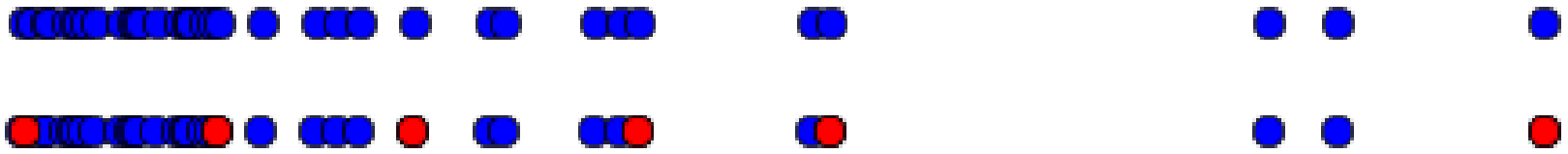
Dynamic Programming: estrategia de `Wang y Song`, a.k.a. `Jenks' Natural Breaks`

Input: número de "clusters" k, y n floats, con $n \geq k$; x_1 to x_n en orden creciente (pasa un `sort` si no).

Tabulamos: $C[i, m]$, coste de un "clustering" de los puntos x_1 to x_i en m "clusters", para $m \leq k$ y $m \leq i$; la solución está en $C[n, k]$.

Inicialización: $C[i, m] = 0$ si $m = 0$.

¿Relación con "un cluster menos"? Identificamos el punto más pequeño del último "cluster".



K-Means: mínimo global en dimension 1, II

¿Cuál es la diferencia entre m clusters y $m-1$ clusters?

$$C[i,m] = \min_{h \leq j \leq i}(C[j-1,m-1] + \sum_{j \leq \ell \leq i} d(x_\ell, c_{j,i})^2)$$

K-Means: mínimo global en dimension 1, II

¿Cuál es la diferencia entre m clusters y $m-1$ clusters?

$$C[i,m] = \min_{h \leq j \leq i}(C[j-1,m-1] + \sum_{j \leq \ell \leq i} d(x_\ell, c_{j,i})^2)$$

donde

$c_{j,i} = \frac{1}{i-j+1} \sum_{j \leq \ell \leq i} x_\ell$ y

K-Means: mínimo global en dimension 1, II

¿Cuál es la diferencia entre m clusters y $m-1$ clusters?

$$C[i,m] = \min_{h \leq j \leq i}(C[j-1, m-1] + \sum_{j \leq \ell \leq i} d(x_\ell, c_{j,i})^2)$$

donde

$c_{j,i} = \frac{1}{i-j+1} \sum_{j \leq \ell \leq i} x_\ell$ y

$h = m$.

K-Means: mínimo global en dimension 1, III

Demo available

`https://www.cs.upc.edu/~balqui/demoWSJ/`

Alpha stage!

- Algún día futuro me preocuparé por la estética,
- y por la usabilidad!...

Requiere:

- el número de clusters,
- los puntos que se supone que ya se han procesado y
- el nuevo punto a incorporar.

K-Means: mínimo global en dimension 1, IV

¿Cómo podemos hacerlo mejor?

Esta estrategia lleva a un algoritmo $O(n^3)$.

Mejora: no calcular individualmente cada $c_{j,i}$ sino actualizar $c_{j,i-1}$ (¿cómo hacerlo? Un poco de álgebra te lo dice.)

Ahorramos así una computación lineal que reduce el coste a $O(n^2)$.

(La alternativa de Jenks: in Cartografía sólo precisamos las fronteras entre clusters, sin los centroides. Es posible tunear la fórmula, reemplazando en el esquema de minimización los centroides por su definición.)

Hay quien afirma que se puede hacer en $O(n \log n)$. Ese texto no ha pasado revisión por pares.

Búsqueda exhaustiva, III

Si hay que probar todas las posibles soluciones, hagámoslo bien

¿No encuentras más opción que la búsqueda exhaustiva?

(No olvides preguntar si alguien ha demostrado NP-hardness; más explicaciones sobre esto en la segunda mitad del curso.)

1. Empieza por existencia, deja la optimización para después;
2. Usa la librería estándar para programar rápidamente una búsqueda exhaustiva, aunque sea exponencialmente lenta, y pruébala.
3. Se puede usar también para contabilizar repeticiones de subproblemas.
4. Si es demasiado lenta, plantea una solución por backtracking.
5. Subproblemas frecuentemente repetidos? Consideramos aplicar Programación Dinámica (dynamic programming), tal vez tras "backtracking", o tal vez directamente para empezar.

Búsqueda exhaustiva, IV

Una vez en este punto:

- Plantea el problema en términos de optimización.
- ¿"Best-first search"?

  (Es decir, A* y familia ("iterative deepening"...)

  `https://en.wikipedia.org/wiki/Best-first_search`.)
- ¿"Branch-and-bound"? ¿"Branch-and-cut"?, ¿AO* con "alpha-beta pruning"?...)

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales

Búsqueda combinatoria

Calculabilidad e indecidibilidad
- Funciones recursivas parciales
- Indecidibilidad
- Enumerabilidad recursiva

Clases de complejidad

Preguntas

Sobre temas aparentemente variados... que resultan ser el mismo

- El "tipo 0" de la jerarquía de Chomsky: ¿qué ocurre cuando consideramos gramáticas sin ningún tipo de restricciones?
- ¿Cambian mucho las cosas si un autómata con pila tiene, en vez de una sola pila, dos?
- ¿Con qué números reales estamos trabajando en realidad cuando desarrollamos todos los algoritmos del Cálculo Numérico?
- Si partimos de unas pocas funciones muy sencillas y las vamos combinando por composición y mecanismos similares, ¿qué funciones obtenemos?
- Dejando aparte los lenguajes de programación "de propósito específico" orientados a una actividad concreta y considerando los "de propósito general", ¿hay problemas computacionales que podemos resolver en unos pero no en otros?

Decidibilidad

¿Existe un límite a lo que se puede hacer por software?

Varios enfoques heterogéneos...

¡que llevan todos al mismo punto!

Decidibilidad

¿Existe un límite a lo que se puede hacer por software?

Varios enfoques heterogéneos...

¡que llevan todos al mismo punto!

La pregunta de partida:

El "Entscheidungsproblem"
(`https://es.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsproblem`):

- Precursores (Llull, Pascal, Leibniz, Babbage...)
- Hilbert y Ackermann, 1928, concretando preguntas anteriores: ¿qué algoritmo ("Entscheidungsverfahren") nos permite decidir si una fórmula de la lógica de primer orden es cierta?

Decidibilidad

¿Existe un límite a lo que se puede hacer por software?

Varios enfoques heterogéneos...

¡que llevan todos al mismo punto!

La pregunta de partida:

El "Entscheidungsproblem"
(`https://es.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsproblem`):

- Precursores (Llull, Pascal, Leibniz, Babbage...)
- Hilbert y Ackermann, 1928, concretando preguntas anteriores: ¿qué algoritmo ("Entscheidungsverfahren") nos permite decidir si una fórmula de la lógica de primer orden es cierta?
- Turing, 1936: no lo hay; existen problemas indecidibles, y justo ése es uno de ellos.
- Independientemente, Gödel y Church, también en 1936, proponen nociones de indecidibilidad e incompletitud que, como iremos viendo, llevan a las mismas intuiciones.

Dramatis Personae

Algunos nombres que van a irnos apareciendo

1. Las funciones recursivas parciales, que originariamente se definieron a través de diversas formas de recursividad... pero ya no, aunque conservan el nombre.
2. Las máquinas de Turing y, en particular, la Máquina de Turing Universal...
3. y su análogo, la función recursiva parcial universal.
4. Ambos métodos nos dan lugar a la noción de función calculable.
5. Un lenguaje será decidible si su función característica es calculable.
6. (Si se me escapa la expresión "lenguaje recursivo" quiero decir "lenguaje decidible".)

Dramatis Personae

Algunos nombres que van a irnos apareciendo

1. Las funciones recursivas parciales, que originariamente se definieron a través de diversas formas de recursividad... pero ya no, aunque conservan el nombre.
2. Las máquinas de Turing y, en particular, la Máquina de Turing Universal...
3. y su análogo, la función recursiva parcial universal.
4. Ambos métodos nos dan lugar a la noción de función calculable.
5. Un lenguaje será decidible si su función característica es calculable.
6. (Si se me escapa la expresión "lenguaje recursivo" quiero decir "lenguaje decidible".)
7. Y tendremos también "lenguajes indecidibles" y "funciones no calculables".

“Pairing” y “tupling”, I

Ejercicios previos

¿Conocemos el Hotel de Hilbert?

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert’s_paradox_of_the_Grand_Hotel

“Pairing” y “tupling”, I

Ejercicios previos

¿Conocemos el Hotel de Hilbert?

`https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel`

$$\langle x.y \rangle = (1/2)(x+y)(x+y+1)+x+1$$

Universalidad, I

Jugamos un ratito con el intérprete de Python.

Todos los tipos son, en el fondo, sólo uno:

Todo archivo que tengamos en la memoria de una máquina se puede ver:

- como un `string` probablemente muy largo: programas fuente, compilados, bases de datos...
- o bien como un número natural en binario.

Universalidad, I

Jugamos un ratito con el intérprete de Python.

Todos los tipos son, en el fondo, sólo uno:

Todo archivo que tengamos en la memoria de una máquina se puede ver:

- como un `string` probablemente muy largo: programas fuente, compilados, bases de datos...
- o bien como un número natural en binario.

Consideramos `strings` que describen expresiones.

- No usamos aún programas en toda su generalidad.
- Sólo componemos funciones, es decir, evaluamos expresiones.
- ¿Deja realmente la expresión de ser una `string`?
- `eval('3 * 4')` y otros ejemplos en esa línea.

Funciones Recursivas Parciales, I

De momento, entre los números naturales

La versión clásica de las funciones recursivas parciales es entre tuplas de números.

Se complican los razonamientos y la notación, porque hay que andar concretando tamaños de cada tupla.

Aquí simplificaremos.

- Empezamos considerando sólo funciones (posiblemente) parciales de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
- Tenemos ya cómo representar pares de números en uno solo:

$$\langle x.y \rangle = (1/2)(x+y)(x+y+1) + x + 1$$

- Si $n \neq 0$, entonces $n = \langle x.y \rangle$ representa el par $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

“Pairing” y “tupling”, II

Tuplas en sentido más amplio

¿Tuplas de 3 naturales en uno?

¡Fácil!

$$\langle x.y.x \rangle = \langle x.\langle y.z \rangle \rangle$$

- Generaliza a cualquier longitud fija.
- Sobrecargamos el símbolo.

“Pairing” y “tupling”, II

Tuplas en sentido más amplio

¿Tuplas de 3 naturales en uno?

¡Fácil!

$$\langle x.y.x\rangle = \langle x.\langle y.z\rangle\rangle$$

- Generaliza a cualquier longitud fija.
- Sobrecargamos el símbolo.

Pero... ¿tuplas de longitud variable?

Se complica una pizca, pero poco:

- $\langle x\rangle = \langle x.0\rangle$,
- $\langle x, y\rangle = \langle x.\langle y\rangle\rangle = \langle x.\langle y.0\rangle\rangle$ y, en general,
- para $m > 1$, $\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle = \langle x_0.\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle\rangle$.

“Pairing” y “tupling”, II

Tuplas en sentido más amplio

¿Tuplas de 3 naturales en uno?

¡Fácil!

$$\langle x.y.x\rangle = \langle x.\langle y.z\rangle\rangle$$

- Generaliza a cualquier longitud fija.
- Sobrecargamos el símbolo.

Pero... ¿tuplas de longitud variable?

Se complica una pizca, pero poco:

- $\langle x\rangle = \langle x.0\rangle$,
- $\langle x, y\rangle = \langle x.\langle y\rangle\rangle = \langle x.\langle y.0\rangle\rangle$ y, en general,
- para $m > 1$, $\langle x_0, \ldots, x_{m-1}\rangle = \langle x_0.\langle x_1, \ldots, x_{m-1}\rangle\rangle$.
- Naturalmente, el 0 codifica, según este esquema, la secuencia vacía $\langle\rangle$.

“Pairing” y “tupling”, III

Proyecciones del par

Funciones inversas para el “tupling”.

Funciones de proyección, π^L y π^R:

- permiten descodificar un par,
- seleccionando individualmente cada una de las componentes: $\langle \pi^L(x).\pi^R(x) \rangle = x$ si $x > 0$.
- Sobreyectivas.
- Existen funciones similares para tamaños mayores de tupla.
- Convenimos que $\pi^L(0) = 0$ y $\pi^R(0) = 0$.

“Pairing” y “tupling”, VI

Proyección general

Función de proyección:

Denotada $\pi(\langle w.k \rangle)$ donde w es una tupla de al menos k componentes, devuelve la componente k de w.

Por ejemplo:

$$\pi(\langle \langle x, y, z \rangle .1 \rangle) = y.$$

$$\pi(\langle \langle x, y, z \rangle .2 \rangle) = z.$$

Funciones Recursivas Parciales, II

Punto de partida para construir funciones

Funciones básicas:

- la identidad,
- la función constante 1, $k_1(x) = 1$,
- la suma $\langle x.y \rangle \to x + y$,
- el producto $\langle x.y \rangle \to x * y$,
- la diferencia modificada $\langle x.y \rangle \to x \dot{-} y = \max(x - y, 0)$,
- y un par de funciones relacionadas con tuplas que explicaremos en el lab.

Funciones Recursivas Parciales, II

Punto de partida para construir funciones

Funciones básicas:

- la identidad,
- la función constante 1, $k_1(x) = 1$,
- la suma $\langle x.y \rangle \to x + y$,
- el producto $\langle x.y \rangle \to x * y$,
- la diferencia modificada $\langle x.y \rangle \to x \dot{-} y = \max(x - y, 0)$,
- y un par de funciones relacionadas con tuplas que explicaremos en el lab.

Algunas (spoiler: *muchas*) funciones nos saldrán parciales: sólo están definidas en su dominio $\mathrm{Dom}\ \phi \subseteq \mathbb{N}$, un subconjunto (propio o impropio) de los números naturales.

Abreviamos $x \in \mathrm{Dom}\ \phi$ como $\phi(x)\downarrow$, y $x \notin \mathrm{Dom}\ \phi$ como $\phi(x)\uparrow$.

Funciones Recursivas Parciales, III

Primera aproximación

Operativa:

- Composición: $\phi \circ \psi(n) = \phi(\psi(n))$.
- Formación de pares ("pairing"): $\langle \phi . \psi \rangle(n) = \langle \phi(n) . \psi(n) \rangle$.
- Minimización sobre una función ϕ, definida por
  $\psi(x) = \min\{z \mid \phi(\langle x.z \rangle) = 1 \wedge \forall w < z \; \phi(\langle x.w \rangle)\downarrow\}$
  si este conjunto es no vacío, y $\psi(x)\uparrow$ en otro caso.

Las funciones recursivas parciales son las que podemos construir a partir de las básicas, combinándolas con estas tres operaciones.

"Minimización" es el nombre clásico; la denotamos $\psi = \mu\phi$. El nombre moderno debería ser "búsqueda lineal".

Funciones Recursivas Parciales, III

Primera aproximación

Operativa:

- Composición: $\phi \circ \psi(n) = \phi(\psi(n))$.
- Formación de pares ("pairing"): $\langle \phi.\psi \rangle(n) = \langle \phi(n).\psi(n) \rangle$.
- Minimización sobre una función ϕ, definida por
  $\psi(x) = \min\{z \mid \phi(\langle x.z \rangle) = 1 \wedge \forall w < z\ \phi(\langle x.w \rangle)\downarrow\}$
  si este conjunto es no vacío, y $\psi(x)\uparrow$ en otro caso.

Las funciones recursivas parciales son las que podemos construir a partir de las básicas, combinándolas con estas tres operaciones.

"Minimización" es el nombre clásico; la denotamos $\psi = \mu\phi$. El nombre moderno debería ser "búsqueda lineal".

Llamamos "predicados" a funciones totales que sólo devuelven los valores 0 o 1.

Funciones Recursivas Parciales, IV

Gödelización

Cómo lograr que las funciones recursivas parciales "sean" números:

- Empezamos por las funciones básicas:
  - $\langle 0.0 \rangle = 1$ para la identidad, $\phi_1(x) = x$ para todo x.
  - $\langle 0.1 \rangle = 2$ para la constante 1, $\phi_2(x) = 1$ para todo x.
  - ...
- El cero nos informa de que se trata de una función básica, y la segunda componente nos indica cual.
- Usamos tuplas que empiezan por 1 para indicar funciones que se obtienen por composición, por 2 para funciones que se obtienen por formación de pares, y por 3 para las que se obtienen por minimización.
  - Si $i = \langle 1.\langle j.k \rangle \rangle$, indica que $\phi_i = \phi_j \circ \phi_k$.
  - Si $i = \langle 2.\langle j.k \rangle \rangle$, indica que $\phi_i = \langle \phi_j.\phi_k \rangle$.
  - Si $i = \langle 3.j \rangle$, que ϕ_i se obtiene por minimización sobre ϕ_j.

Todos los demás números (incluido el cero) corresponden a la función totalmente indefinida: $\phi_0(x)\uparrow$ para todo x.

Universalidad, II

O bien: Funciones Recursivas Parciales, V

En las sesiones de lab construiremos un número **u** cuya función recursiva parcial asociada cumplirá la siguiente igualdad:

para todo i y x,

Universalidad, II

O bien: Funciones Recursivas Parciales, V

En las sesiones de lab construiremos un número $\mathbf{u}$ cuya función recursiva parcial asociada cumplirá la siguiente igualdad:

para todo i y x,

$$\boxed{\phi_{\mathbf{u}}(i, x) = \phi_i(x).}$$

Universalidad, III

O bien: Funciones Recursivas Parciales, VI

```
piggyback_1
 Pairs up x with 1: <x.1>
 pair: id k_1
 Gödel number: 69 = <2.9>

ant
 The antecessor function
 comp: diff piggyback_1
 Gödel number: 8864157 = <1.4209>

piggyback_ant
 Pairs up x with its antecessor
 pair: id ant
 Gödel number: 77172089850802532935067317 8 = <2.39286661820723>

sign
 Sign: 0 for 0, 1 for the rest
 comp: diff piggyback_ant
 Gödel number: 443354435938132575913294421729482203779217863202
051000656957423992736466689423025447070750343079388659670 02 = <
1.297776572597016965502292146825324037616981311274456623>
>>> cp.dp(2, 8864157)
39286661820723
>>> cp.dp(22, 69)
4209
```

Indecidibilidad, I

El "problema de parada"

Se conoce como problema de parada dos conjuntos similares que resultan tener las mismas propiedades.

- El dominio de la función universal:

$$\mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}} = \{\langle i.x\rangle \mid \phi_u(\langle i.x\rangle)\downarrow\} = \{\langle i.x\rangle \mid \phi_i(x)\downarrow\}.$$

- Su versión simplificada $K = \{i \mid \phi_i(i)\downarrow\}$.

Claramente: $i \in K \iff \langle i.i\rangle \in \mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}}$,

luego, si $\mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}}$ es decidible, entonces K también lo es.

Indecidibilidad, I

El "problema de parada"

Se conoce como problema de parada dos conjuntos similares que resultan tener las mismas propiedades.

- El dominio de la función universal:

$$\mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}} = \{\langle i.x\rangle \mid \phi_u(\langle i.x\rangle)\downarrow\} = \{\langle i.x\rangle \mid \phi_i(x)\downarrow\}.$$

- Su versión simplificada $K = \{i \mid \phi_i(i)\downarrow\}$.

Claramente: $i \in K \iff \langle i.i\rangle \in \mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}}$,

luego, si $\mathrm{Dom}\ \phi_{\mathbf{u}}$ es decidible, entonces K también lo es.

Y llegamos al Teorema de Indecidibilidad del Problema de Parada:

El problema de parada es indecidible.

Es decir, χ_K, la función característica de K, no es recursiva.

Indecidibilidad, II

Argumentación de la indecidibilidad del "problema de parada"

Supongamos que χ_K es recursiva total. Construimos, usándola,

$$\phi(x) = \mu z[\pi^L(\langle \chi_K(x).z \rangle) = 0]$$

que es, por tanto recursiva parcial: le corresponde algún índice j.

Indecidibilidad, II

Argumentación de la indecidibilidad del "problema de parada"

Supongamos que χ_K es recursiva total. Construimos, usándola,

$$\phi(x) = \mu z[\pi^L(\langle \chi_K(x).z \rangle) = 0]$$

que es, por tanto recursiva parcial: le corresponde algún índice j.

Esta función cumple, para todo x,

$$\phi_j(x) = 0 \text{ si } x \notin K, \text{ y}$$
$$\phi_j(x)\uparrow \text{ si } x \in K.$$

Podemos considerar el caso $x = j$: $\phi_j(j)\downarrow$ si y sólo si $j \notin K$.

Pero la definición de K nos dice: $j \in K$ si y sólo si $\phi_j(j)\downarrow$ (es decir, justamente, lo contrario).

Sólo se puede evitar la contradicción si es falsa la suposición de que χ_K es recursiva total.

Reducibilidad, I

Ya vista entre las variantes del problema de parada

Hay varias nociones de reducibilidad. Aquí consideramos sólo m-reducibilidad.

L es reducible a L', denotado $L \leq_m L'$

si existe una función recursiva total f tal que, para todo x,

- $x \in L \iff f(x) \in L'$, o sea,
- $L = f^{-1}(L')$, o sea,
- $\chi_L = \chi_{L'} \circ f$.

Reducibilidad, I

Ya vista entre las variantes del problema de parada

Hay varias nociones de reducibilidad. Aquí consideramos sólo m-reducibilidad.

L es reducible a L', denotado $L \leq_m L'$

si existe una función recursiva total f tal que, para todo x,

- $x \in L \iff f(x) \in L'$, o sea,
- $L = f^{-1}(L')$, o sea,
- $\chi_L = \chi_{L'} \circ f$.

Si $L \leq_m L'$ y L' es decidible, también lo es L.

Reducibilidad, I

Ya vista entre las variantes del problema de parada

Hay varias nociones de reducibilidad. Aquí consideramos sólo m-reducibilidad.

L es reducible a L', denotado $L \leq_m L'$

si existe una función recursiva total f tal que, para todo x,

- $x \in L \iff f(x) \in L'$, o sea,
- $L = f^{-1}(L')$, o sea,
- $\chi_L = \chi_{L'} \circ f$.

Si $L \leq_m L'$ y L' es decidible, también lo es L.

Si $L \leq_m L'$ y L es indecidible, también lo es L'.

Parametrización, I

Evaluación parcial

Función de parametrización o s_1

Existe una función s_1 recursiva total tal que para todo i, x, y, $\phi_i(\langle x.y \rangle) = \phi_{s_1(\langle i.x \rangle)}(y)$.

Parametrización, I

Evaluación parcial

Función de parametrización o s_1

Existe una función s_1 recursiva total tal que para todo i, x, y, $\phi_i(\langle x.y \rangle) = \phi_{s_1(\langle i.x \rangle)}(y)$.

Parametrización significa evaluación parcial:

1. Tenemos un programa i del que nos importa ver su entrada como consistente en dos partes, $\phi_i(\langle x.y \rangle)$.
2. Ahora es como si tuviéramos, por ahora, sólo una de las dos partes, x.
3. Pues bien, "podemos incorporarla al programa i": $\phi_{s_1(\langle i.x \rangle)}$.
4. Y, más tarde, cuando llegue la y, podremos calcular $\phi_{s_1(\langle i.x \rangle)}(y) = \phi_i(\langle x.y \rangle)$.

La función `partial` del módulo `functools` de Python cumple el mismo rol.

Parametrización, II

¿Cómo obtendremos las funciones que permiten argumentar reducibilidad?

Ejemplo:

Sea $Tot = \{i \mid \forall x \phi_i(x)\downarrow\}$: el conjunto de los índices de funciones recursivas totales.

- Sea $\rho(\langle x.y\rangle) = \phi_{\mathbf{u}}(\langle x.x\rangle)$.
- Es recursiva parcial; por tanto, hay j tal que $\phi_j = \rho$. Fijamos ese j, y definimos $f(x) = s_1(\langle j.x\rangle)$.
- Si $x \in K$, entonces $f(x) = s_1(\langle j.x\rangle) \in Tot$ ya que, para todo y, $\phi_{f(x)}(y) = \phi_{s_1(\langle j.x\rangle)}(y) = \phi_j(\langle x.y\rangle) = \phi_{\mathbf{u}}(\langle x.x\rangle) = \phi_x(x)\downarrow$
- Si $x \notin K$, entonces $f(x) = s_1(\langle j.x\rangle) \notin Tot$ ya que, para todo y, $\phi_{f(x)}(y) = \phi_{s_1(\langle j.x\rangle)}(y) = \phi_j(\langle x.y\rangle) = \phi_{\mathbf{u}}(\langle x.x\rangle) = \phi_x(x)\uparrow$

Conjuntos índex, I

¿Conjuntos de números o conjuntos de funciones?

Ahora, un conjunto A de números naturales se puede interpretar también como un conjunto de funciones recursivas parciales, $\{\phi_i \mid i \in A\}$, es decir, como una propiedad de los programas que las calculan.

¿Cuándo es una propiedad de la función?

Si tenemos $\phi_i = \phi_j$ pero sólo uno de i y j está en A, entonces **no** es una propiedad de la función.

Conjuntos índex, II

Propiedades de programas versus propiedades de funciones

A es un <u>conjunto índex</u> si, para todo i y j tales que $\phi_i = \phi_j$, o bien ambos están en A o bien ninguno.

Un conjunto índex representa una propiedad de las funciones calculables que es independiente de qué programas usemos para calcularlas.

- Los índices de funciones totales, Tot,
- los índices de la función completamente indefinida, V...

Casos triviales:

- Ninguna función cumple la propiedad ($A = \emptyset$).
- Todas las funciones la cumplen.

Casos no triviales:

Hay algún $a \in A$ y hay algún $b \notin A$.

Conjuntos índex, III

O bien: Indecidibilidad, III

Teorema de Rice:

Todo conjunto índex no trivial es indecidible.

Conjuntos índex, III

O bien: Indecidibilidad, III

Teorema de Rice:

Todo conjunto índex no trivial es indecidible.

Incluye el caso de Tot, ya visto, el de V, y muchos más.

Conjuntos índex, III

O bien: Indecidibilidad, III

Teorema de Rice:

Todo conjunto índex no trivial es indecidible.

Incluye el caso de Tot, ya visto, el de V, y muchos más.

Permutamos o no A con su complementario de manera que $0 \notin A$.

Recordemos el convenio de que ϕ_0 es la función completamente indefinida. Fijamos $a \in A$ y definimos:

$$\phi_{s_1(\langle j.x \rangle)}(y) = \phi_j(\langle x.y \rangle) = \phi_a(y) * \mathrm{sg}(1 + \phi_{\mathbf{u}}(\langle x.x \rangle)).$$

- Si $x \in K$, entonces $s_1(\langle j.x \rangle) \in A$: misma función que ϕ_a.
- Si $x \notin K$, entonces $s_1(\langle j.x \rangle) \notin A$: misma función que ϕ_0.

Y, por tanto, $K \leq_m A$.

("El `jutge` no se puede hacer de otra manera.")

Cuantificación existencial no acotada, I

O bien: Reducibilidad, II

Varias maneras equivalentes de definir los conjuntos enumerables recursivamente (a veces denominados reconocibles):

1. Imágenes de las funciones recursivas totales (o bien $\emptyset$).
2. Imágenes de las funciones recursivas parciales.
3. Cuantificación existencial ("proyección") de conjuntos decidibles.
4. Dominios de las funciones recursivas parciales.
5. La noción coincide con el Tipo 0 de la jerarquía de Chomsky.

Todo conjunto decidible es enumerable recursivamente.

Cuantificación existencial no acotada, I

O bien: Reducibilidad, II

Varias maneras equivalentes de definir los conjuntos enumerables recursivamente (a veces denominados reconocibles):

1. Imágenes de las funciones recursivas totales (o bien $\emptyset$).
2. Imágenes de las funciones recursivas parciales.
3. Cuantificación existencial ("proyección") de conjuntos decidibles.
4. Dominios de las funciones recursivas parciales.
5. La noción coincide con el Tipo 0 de la jerarquía de Chomsky.

Todo conjunto decidible es enumerable recursivamente.

Además:

- K es enumerable recursivamente.
- Para todo L enumerable recursivamente, $L \leq_m K$.

Decimos que K es completo para los enumerables recursivamente.

Autoreferencia, I

Programas que se conocen a sí mismos

Teorema de recursión

(una de entre varias versiones existentes):

Sea f una función recursiva total. Existe un número natural n tal que $\phi_{f(n)} = \phi_n$.

Nos permite tener programas que "conocen su propio texto". Por ejemplo:

- Sea $\phi_j(\langle x.y \rangle) = x$.
- Consideramos $f(x) = s_1(\langle j.x \rangle)$.
- Deducimos que hay un n tal que, para todo y,

$$\phi_n(y) = \phi_{f(n)}(y) = \phi_{s_1(\langle j.n \rangle}(y) = \phi_j(\langle n.y \rangle) = n.$$

(Aprovechamos para ver un desafío similar en Python.)

Autoreferencia, II

Relacionado con el combinador Y del lambda-cálculo

1. Mediante parametrización, obtenemos:

$$\phi_{s(x)}(y) = \phi_{\phi_x(x)}(y).$$

2. La composición $f \circ s$ es recursiva total, y tiene un índice:

$$\phi_m = f \circ s.$$

3. Y ahora, simplemente, $n = s(m)$.

Indecidibilidad, IV

Volvemos al "Entscheidungsproblem"

Gödel:

- Fórmulas que definen conjuntos de números; en particular, los dominios de funciones recursivas parciales son definibles.
- En particular, hay una fórmula que define K:
  $n \in K \iff \kappa(\mathtt{n})$ es cierta.
- Números que codifican fórmulas lógicas de la aritmética.
- W: los números de las fórmulas ciertas.
- Hay una función recursiva total v que, dado n, construye el número de la fórmula $\kappa(\mathtt{n})$.

Indecidibilidad, IV

Volvemos al "Entscheidungsproblem"

Gödel:

- Fórmulas que definen conjuntos de números; en particular, los dominios de funciones recursivas parciales son definibles.
- En particular, hay una fórmula que define K:
  $n \in K \iff \kappa(\mathtt{n})$ es cierta.
- Números que codifican fórmulas lógicas de la aritmética.
- W: los números de las fórmulas ciertas.
- Hay una función recursiva total v que, dado n, construye el número de la fórmula $\kappa(\mathtt{n})$.
- $n \in K \iff v(n) \in W$.

Indecidibilidad, IV

Volvemos al "Entscheidungsproblem"

Gödel:

- Fórmulas que definen conjuntos de números; en particular, los dominios de funciones recursivas parciales son definibles.
- En particular, hay una fórmula que define K:
  $n \in K \iff \kappa(\mathtt{n})$ es cierta.
- Números que codifican fórmulas lógicas de la aritmética.
- W: los números de las fórmulas ciertas.
- Hay una función recursiva total v que, dado n, construye el número de la fórmula $\kappa(\mathtt{n})$.
- $n \in K \iff v(n) \in W$.

Turing:

W es indecidible.

Indecidibilidad, V

"To infinity. . . and beyond!"

Grados de Indecidibilidad

1. Grado cero: conjuntos decidibles.
2. Grado uno: K es enumerable recursivamente pero no decidible.
3. Grado dos: el conjunto de los índices de funciones totales $\{i \mid \forall x\, \phi_i(x)\downarrow\}$ es "el doble de indecidible": tiene con K la misma relación que $\overline{K}$ con los decidibles.
4. . . .

Indecidibilidad, V

"To infinity. . . and beyond!"

Grados de Indecidibilidad

1. Grado cero: conjuntos decidibles.
2. Grado uno: K es enumerable recursivamente pero no decidible.
3. Grado dos: el conjunto de los índices de funciones totales $\{i \mid \forall x\, \phi_i(x)\downarrow\}$ es "el doble de indecidible": tiene con K la misma relación que $\overline{K}$ con los decidibles.
4. . . .
5. El grado de indecidibilidad de W es el límite de todos estos grados.

Funciones Recursivas Parciales, V

Esquemas adicionales

- Distinción de casos: si χ_A, f y g son recursivas totales, también lo es

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Funciones Recursivas Parciales, V

Esquemas adicionales

- Distinción de casos: si χ_A, f y g son recursivas totales, también lo es

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- Cuantificación existencial acotada: si P es un predicado recursivo, también lo es:

$$P'(\langle x.t \rangle) = 1 \iff \exists y(y \leq t \wedge P(\langle x.y \rangle) = 1).$$

Funciones Recursivas Parciales, V

Esquemas adicionales

- Distinción de casos: si χ_A, f y g son recursivas totales, también lo es

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

- Cuantificación existencial acotada: si P es un predicado recursivo, también lo es:

$$P'(\langle x.t \rangle) = 1 \iff \exists y(y \leq t \wedge P(\langle x.y \rangle) = 1).$$

- Cuantificación universal acotada: si P es un predicado recursivo, también lo es:

$$P''(\langle x.t \rangle) = 1 \iff \forall y(y \leq t \Rightarrow P(\langle x.y \rangle) = 1).$$

Funciones Recursivas Parciales, VI

Nuestra recursividad "de toda la vida"

Se define s por recursión primitiva a partir de la función total f si

$$s(x) = f(\langle x, s(x-1), \ldots, s(1), s(0)\rangle) \text{ para } x > k.$$

Funciones Recursivas Parciales, VI

Nuestra recursividad "de toda la vida"

Se define s por recursión primitiva a partir de la función total f si

$$s(x) = f(\langle x, s(x-1), \ldots, s(1), s(0)\rangle) \text{ para } x > k.$$

(Conjuntamente con casos base para $x \leq k$, para algún k.)

Funciones Recursivas Parciales, VI

Nuestra recursividad "de toda la vida"

Se define s por recursión primitiva a partir de la función total f si

$$s(x) = f(\langle x, s(x-1), \ldots, s(1), s(0)\rangle) \text{ para } x > k.$$

(Conjuntamente con casos base para $x \leq k$, para algún k.)

Las funciones recursivas parciales permiten definiciones por recursión primitiva: si f es recursiva total, s también lo es.

Funciones Recursivas Parciales, VI

Nuestra recursividad "de toda la vida"

Se define s por recursión primitiva a partir de la función total f si

$$s(x) = f(\langle x, s(x-1), \ldots, s(1), s(0)\rangle) \text{ para } x > k.$$

(Conjuntamente con casos base para $x \leq k$, para algún k.)

Las funciones recursivas parciales permiten definiciones por recursión primitiva: si f es recursiva total, s también lo es.

¿Por qué?

$$\phi(x) = \pi^L(\mu y[R_f(\langle x.y\rangle) = 1]),$$

donde $R_f(\langle x.y\rangle)$, con $y = \langle y_x, \ldots, y_0\rangle$, es:

$$\forall t \leq x(t \leq k \Rightarrow y_t = \ldots) \wedge t > k \Rightarrow y_t = f(\langle t, y_{t-1}, \ldots, y_0\rangle))$$

Observemos que la parte $y_t = \ldots$ requiere concretar cómo se resuelven los casos base.

Funciones Recursivas Parciales, VII

El predicado T de Kleene: escribimos $T(i, x, y, t)$ en vez de $T(\langle i.x.y.t \rangle)$

El predicado $T(i, x, y, t)$ se define como sigue: $T(i, x, y, t) = 1 \ldots$

Funciones Recursivas Parciales, VII

El predicado T de Kleene: escribimos $T(i, x, y, t)$ en vez de $T(\langle i.x.y.t \rangle)$

El predicado $T(i, x, y, t)$ se define como sigue: $T(i, x, y, t) = 1 \ldots$

- si ϕ_i es básica, digamos, $i = \langle 0.j \rangle$, cuando $t \geq x$ y $\phi_i(x) = y$;

Funciones Recursivas Parciales, VII

El predicado T de Kleene: escribimos $T(i, x, y, t)$ en vez de $T(\langle i.x.y.t\rangle)$

El predicado $T(i, x, y, t)$ se define como sigue: $T(i, x, y, t) = 1\ldots$

- si ϕ_i es básica, digamos, $i = \langle 0.j\rangle$, cuando $t \geq x$ y $\phi_i(x) = y$;
- si $\phi_i = \phi_j \circ \phi_k$, cuando

$$\exists s \leq t(s = \langle z.y.p.q\rangle \wedge T(k, x, z, p) \wedge T(j, z, y, q));$$

Funciones Recursivas Parciales, VII

El predicado T de Kleene: escribimos $T(i, x, y, t)$ en vez de $T(\langle i.x.y.t\rangle)$

El predicado $T(i, x, y, t)$ se define como sigue: $T(i, x, y, t) = 1\ldots$

- si ϕ_i es básica, digamos, $i = \langle 0.j\rangle$, cuando $t \geq x$ y $\phi_i(x) = y$;
- si $\phi_i = \phi_j \circ \phi_k$, cuando

$$\exists s \leq t(s = \langle z.y.p.q\rangle \wedge T(k, x, z, p) \wedge T(j, z, y, q));$$

- si $\phi_i = \langle \phi_j.\phi_k\rangle$, cuando

$$y = \langle z.w\rangle \wedge \exists s \leq t(s = \langle p.q\rangle \wedge T(j, x, z, p) \wedge T(k, x, w, q));$$

Funciones Recursivas Parciales, VII

El predicado T de Kleene: escribimos $T(i, x, y, t)$ en vez de $T(\langle i.x.y.t\rangle)$

El predicado $T(i, x, y, t)$ se define como sigue: $T(i, x, y, t) = 1\ldots$

- si ϕ_i es básica, digamos, $i = \langle 0.j\rangle$, cuando $t \geq x$ y $\phi_i(x) = y$;
- si $\phi_i = \phi_j \circ \phi_k$, cuando

$$\exists s \leq t(s = \langle z.y.p.q\rangle \wedge T(k, x, z, p) \wedge T(j, z, y, q));$$

- si $\phi_i = \langle \phi_j.\phi_k\rangle$, cuando

$$y = \langle z.w\rangle \wedge \exists s \leq t(s = \langle p.q\rangle \wedge T(j, x, z, p) \wedge T(k, x, w, q));$$

- si $\phi_i = \mu\phi_j$, cuando

$$\exists s \leq t(\langle\langle x.y\rangle.s\rangle \leq t \wedge s = \langle\langle z_0.s_0\rangle, \ldots, \langle z_y.s_y\rangle\rangle \wedge$$

$$\forall m \leq y(T(j, \langle x.m\rangle, z_m, s_m)) \wedge \forall m < y(z_m \neq 1) \wedge z_y = 1).$$

Cuantificación existencial no acotada, II

Son los conjuntos recursivamente enumerables

Si $x \in \mathrm{Dom}\ \phi_i$, entonces $\exists \langle y.t \rangle\, T(\langle i.x.y.t \rangle)$, y viceversa.

Es decir, los dominios de funciones recursivas parciales son cuantificación existencial de conjuntos recursivos.

Cuantificación existencial no acotada, II

Son los conjuntos recursivamente enumerables

Si $x \in \mathrm{Dom}\ \phi_i$, entonces $\exists \langle y.t \rangle\, T(\langle i.x.y.t \rangle)$, y viceversa.

Es decir, los dominios de funciones recursivas parciales son cuantificación existencial de conjuntos recursivos.

Si $x \in A \iff \exists z\, P(\langle x.z \rangle)$ con P recursivo, entonces $A = \mathrm{Dom}\ \phi_i$, definiendo:

$$\phi_i(x) = \mu z[P(\langle x.z \rangle)].$$

Es decir, conjuntos que se definen por cuantificación existencial de conjuntos recursivos son dominios de funciones recursivas parciales.

Complementación

El complementario de K no es enumerable recursivamente

L es decidible si y sólo si tanto L como su complementario $\overline{L}$ son enumerables recursivamente.

Complementación

El complementario de K no es enumerable recursivamente

L es decidible si y sólo si tanto L como su complementario $\overline{L}$ son enumerables recursivamente.

¿Por qué? Si f enumera L y g enumera $\overline{L}$, entonces, dado x,

$$h(x) = \mu z[f(z) = x \text{ or } g(z) = x]$$

es una función total que nos permite distinguir si $x \in L$ o $x \in \overline{L}$.

Complementación

El complementario de K no es enumerable recursivamente

L es decidible si y sólo si tanto L como su complementario $\overline{L}$ son enumerables recursivamente.

¿Por qué? Si f enumera L y g enumera $\overline{L}$, entonces, dado x,

$$h(x) = \mu z[f(z) = x \text{ or } g(z) = x]$$

es una función total que nos permite distinguir si $x \in L$ o $x \in \overline{L}$.

Por tanto, $\overline{K}$ no es enumerable recursivamente.

Complementación

El complementario de K no es enumerable recursivamente

L es decidible si y sólo si tanto L como su complementario $\overline{L}$ son enumerables recursivamente.

¿Por qué? Si f enumera L y g enumera $\overline{L}$, entonces, dado x,

$$h(x) = \mu z[f(z) = x \text{ or } g(z) = x]$$

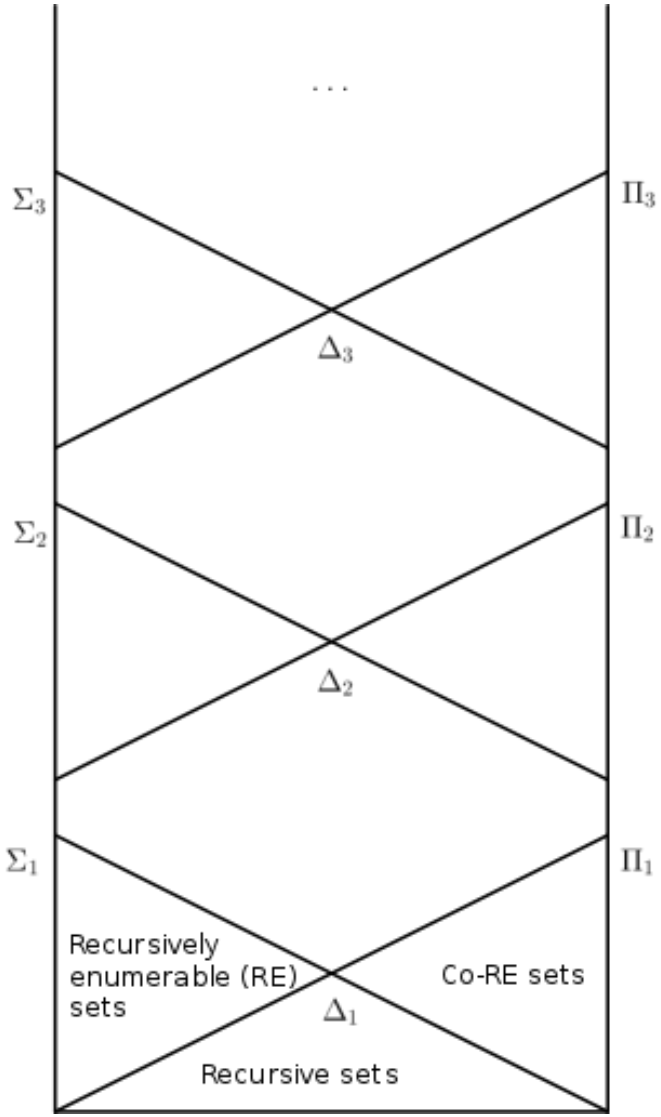
es una función total que nos permite distinguir si $x \in L$ o $x \in \overline{L}$.

Por tanto, $\overline{K}$ no es enumerable recursivamente.

Asimismo: aplicando cuantificación universal no acotada sobre predicados recursivos es posible obtener lenguajes que no son enumerables recursivamente.

(Cuantificación universal define complementarios de la cuantificación existencial.)

Indecidibilidad, VI



La jerarquía aritmética (fuente: `Wikipedia`)

Contenido

Presentación

Teoría de lenguajes formales

Búsqueda combinatoria

Calculabilidad e indecidibilidad

Clases de complejidad
- Cotas de tiempo o de espacio
- Problemas NP-completos

Recursos Limitados

Dentro de lo decidible

- Noción de "recurso":
  1. Tiempo de cálculo,
  2. espacio de memoria requerido,
  3. otros;
  4. es posible un enfoque "abstracto" que define axiomáticamente qué es un recurso de computación.

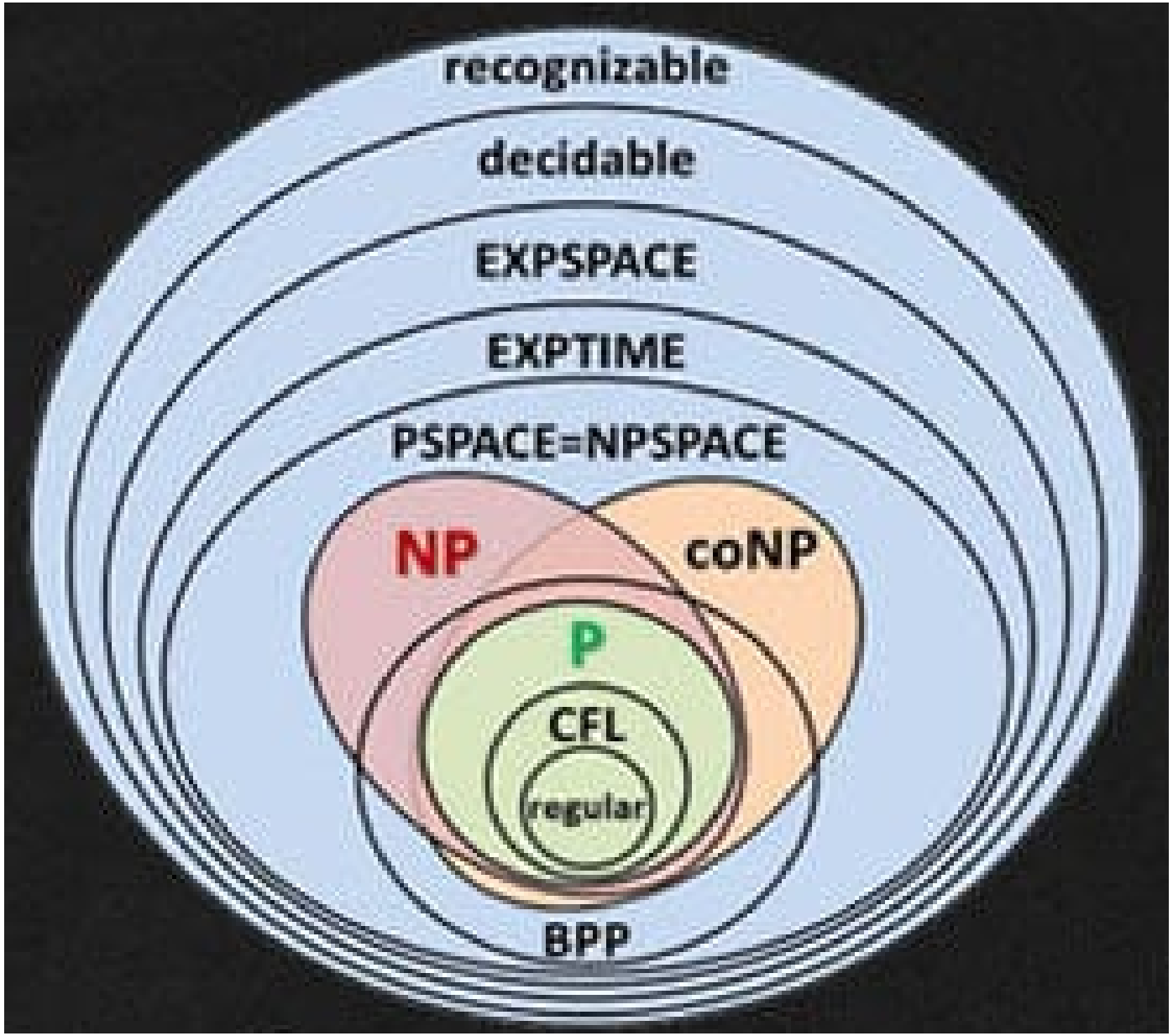
Recursos Limitados

Dentro de lo decidible

- Noción de "recurso":
  1. Tiempo de cálculo,
  2. espacio de memoria requerido,
  3. otros;
  4. es posible un enfoque "abstracto" que define axiomáticamente qué es un recurso de computación.
- ¿Definición precisa de tiempo y espacio?
  - Pasos y casillas en una máquina de Turing multicinta.
  - Se pueden usar muchos otros modelos con resultados invariantes salvo factores constantes.
  - Si expresamos nuestro análisis en términos de $O(\cdot)$, el modelo de cálculo es irrelevante: son equivalentes entre sí.

Clases de Complejidad, I

Clases de Complejidad, II



Algoritmos Indeterministas

Y extensiones adicionales en que no llegaremos a entrar

Volvemos a trabajar principalmente con *strings*.

- Algoritmos indeterministas:
  - Varias opciones para el siguiente paso.
  - Analogía con los autómatas finitos indeterministas: se acepta si existe un camino aceptador.
  - Podemos restringirnos a opciones binarias.
  - Equivalente: se prepara de manera indeterminista una secuencia de bits y luego se siguen esas decisiones de manera determinista.
  - Equivalente: cuantificador existencial acotado.

Algoritmos Indeterministas

Y extensiones adicionales en que no llegaremos a entrar

Volvemos a trabajar principalmente con *strings*.

- Algoritmos indeterministas:
  - Varias opciones para el siguiente paso.
  - Analogía con los autómatas finitos indeterministas: se acepta si existe un camino aceptador.
  - Podemos restringirnos a opciones binarias.
  - Equivalente: se prepara de manera indeterminista una secuencia de bits y luego se siguen esas decisiones de manera determinista.
  - Equivalente: cuantificador existencial acotado.
- Otras generalizaciones en líneas similares:
  - Alternancia de cuantificadores: uno de los modelos existentes de cálculo en paralelo.
  - Algoritmos randomizados.
  - Algoritmos cuánticos.

Clases de Complejidad, III

Clases de Complejidad Auxiliares

Sintaxis: $(N|D)(TIME|SPACE)(\text{bound})$

Ejemplos:

- $NTIME(n^2)$
- $DSPACE(n)$
- $DTIME(n \log n)$
- ...

Clases de Complejidad, III

Clases de Complejidad Auxiliares

Sintaxis: $(N|D)(TIME|SPACE)(\text{bound})$

Ejemplos:

- $NTIME(n^2)$
- $DSPACE(n)$
- $DTIME(n \log n)$
- ...

Siempre en función de n: longitud de la entrada (*string*).

Clases de Complejidad, III

Clases de Complejidad Auxiliares

Sintaxis: $(N|D)(TIME|SPACE)(\text{bound})$

Ejemplos:

- $NTIME(n^2)$
- $DSPACE(n)$
- $DTIME(n \log n)$
- ...

Siempre en función de n: longitud de la entrada (*string*).

Cosas que se saben:

- (Kuroda) $NSPACE(n)$ equivale a las gramáticas sensibles al contexto.
- (Immerman / Szelepcsényi) $NSPACE(n)$, $NSPACE(\log n)$ son cerrados por complementación.
- (Savitch) $NSPACE(n) \subseteq DSPACE(n^2)$.

Clases de Complejidad, IV

Clases de Complejidad Principales

- $P = \bigcup_k DTIME(n^k)$, tiempo polinómico.
- $NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$, tiempo polinómico indeterminista.
- $PSPACE = \bigcup_k DSPACE(n^k) = \bigcup_k NSPACE(n^k)$, espacio polinómico.

Clases de Complejidad, IV

Clases de Complejidad Principales

- $P = \bigcup_k DTIME(n^k)$, tiempo polinómico.
- $NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$, tiempo polinómico indeterminista.
- $PSPACE = \bigcup_k DSPACE(n^k) = \bigcup_k NSPACE(n^k)$, espacio polinómico.
- ...
- Muchas más, con discusiones de sus propiedades, en el `Complexity Zoo` de Scott Aaronson.
- Sugerencia: empieza por visitar el *Petting Zoo* y los breves textos ya disponibles en el *Complexity Dojo* ("under construction").

Clases de Complejidad, V

Tiempo polinómico (Edmonds, 1965)

$$P = \bigcup_k DTIME(n^k)$$

Clases de Complejidad, V

Tiempo polinómico (Edmonds, 1965)

$$P = \bigcup_k DTIME(n^k)$$

- Problemas con algoritmos razonablemente factibles: $O(n^k)$ con k, en la inmensa mayoría de los casos, moderado (aunque hay algunos casos ocasionales con k un poco elevado).
- Muchos casos de *greedy* y unos cuantos de Programación Dinámica:
  - unos cuantos problemas en grafos
    - (caminos mínimos,
    - árboles de expansión,
    - *matchings*,
    - flujos. . .),
  - *linear programming* (fraccional),
  - evaluación de fórmulas proposicionales (*parsing* y parentela),
  - . . .

Clases de Complejidad, VI

Tiempo polinómico indeterminista y completitud (Cook, 1971)

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

Clases de Complejidad, VI

Tiempo polinómico indeterminista y completitud (Cook, 1971)

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k)$$

Problemas para los que:

- Existen algoritmos razonablemente factibles para comprobar si un candidato dado a solución es, en efecto, una solución;
- pero no necesariamente se tiene un algoritmo que encuentre esa solución sin dedicar un tiempo posiblemente exponencial a alguna variante de búsqueda exhaustiva (como backtracking).
- La fase indeterminista "propone una solución" que luego se comprueba determinísticamente en tiempo polinómico: cuantificación existencial acotada polinómicamente,

$$x \in L \iff \exists y \, |y| \leq |x|^k \langle x, y \rangle \in L'$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $L' \in P$.

NP-completitud, I

Respecto de reducibilidad en tiempo polinómico

1971: Stephen Cook detecta que un determinado problema de Lógica Proposicional "captura" el planteamiento de los algoritmos indeterministas.

SAT: Dada una fórmula proposicional, ¿existe una manera de dar valores a las variables que la haga evaluar a `cierto`?

Decimos que esa asignación "satisface" la fórmula (`Wikipedia`).

NP-completitud, I

Respecto de reducibilidad en tiempo polinómico

1971: Stephen Cook detecta que un determinado problema de Lógica Proposicional "captura" el planteamiento de los algoritmos indeterministas.

SAT: Dada una fórmula proposicional, ¿existe una manera de dar valores a las variables que la haga evaluar a `cierto`?

Decimos que esa asignación "satisface" la fórmula (`Wikipedia`).

- SAT $\in NP$.

NP-completitud, I

Respecto de reducibilidad en tiempo polinómico

1971: Stephen Cook detecta que un determinado problema de Lógica Proposicional "captura" el planteamiento de los algoritmos indeterministas.

> SAT: Dada una fórmula proposicional, ¿existe una manera de dar valores a las variables que la haga evaluar a `cierto`?

Decimos que esa asignación "satisface" la fórmula (`Wikipedia`).

- SAT $\in NP$.
- Si $L \in NP$, L es reducible a SAT en tiempo polinómico.

(Luego volvemos sobre esto.)

NP-completitud, I

Respecto de reducibilidad en tiempo polinómico

1971: Stephen Cook detecta que un determinado problema de Lógica Proposicional "captura" el planteamiento de los algoritmos indeterministas.

> SAT: Dada una fórmula proposicional, ¿existe una manera de dar valores a las variables que la haga evaluar a `cierto`?

Decimos que esa asignación "satisface" la fórmula (`Wikipedia`).

- SAT $\in NP$.
- Si $L \in NP$, L es reducible a SAT en tiempo polinómico.

(Luego volvemos sobre esto.)

1973: Leonid Levin identifica, en esencia, el mismo fenómeno de manera independiente en Moscú. (No existe comunicación, por entonces, a través del `Iron Curtain`.)

NP-completitud, II

Tiempo polinómico indeterminista y completitud (Karp, 1972)

1972: Richard Karp, inspirado por el avance de Cook, demuestra que 21 problemas que nadie sabe resolver eficientemente en aquel momento resultan ser equivalentes a SAT.

- 0-1 *integer programming*;
- la mochila y variantes;
- *scheduling*;
- otros cuantos problemas en grafos:
  - árboles de Steiner,
  - coloreado de vértices o aristas,
  - caminos hamiltonianos y variantes,
  - selección de vértices o aristas con determinadas propiedades...

NP-completitud, II

Tiempo polinómico indeterminista y completitud (Karp, 1972)

1972: Richard Karp, inspirado por el avance de Cook, demuestra que 21 problemas que nadie sabe resolver eficientemente en aquel momento resultan ser equivalentes a SAT.

- 0-1 *integer programming*;
- la mochila y variantes;
- *scheduling*;
- otros cuantos problemas en grafos:
  - árboles de Steiner,
  - coloreado de vértices o aristas,
  - caminos hamiltonianos y variantes,
  - selección de vértices o aristas con determinadas propiedades...

Todos ellos son NP-completos:

- Están en NP.
- Si $L \in NP$, L es reducible en tiempo polinómico a todos ellos.

NP-completitud, III

Karp 1972: facsímil

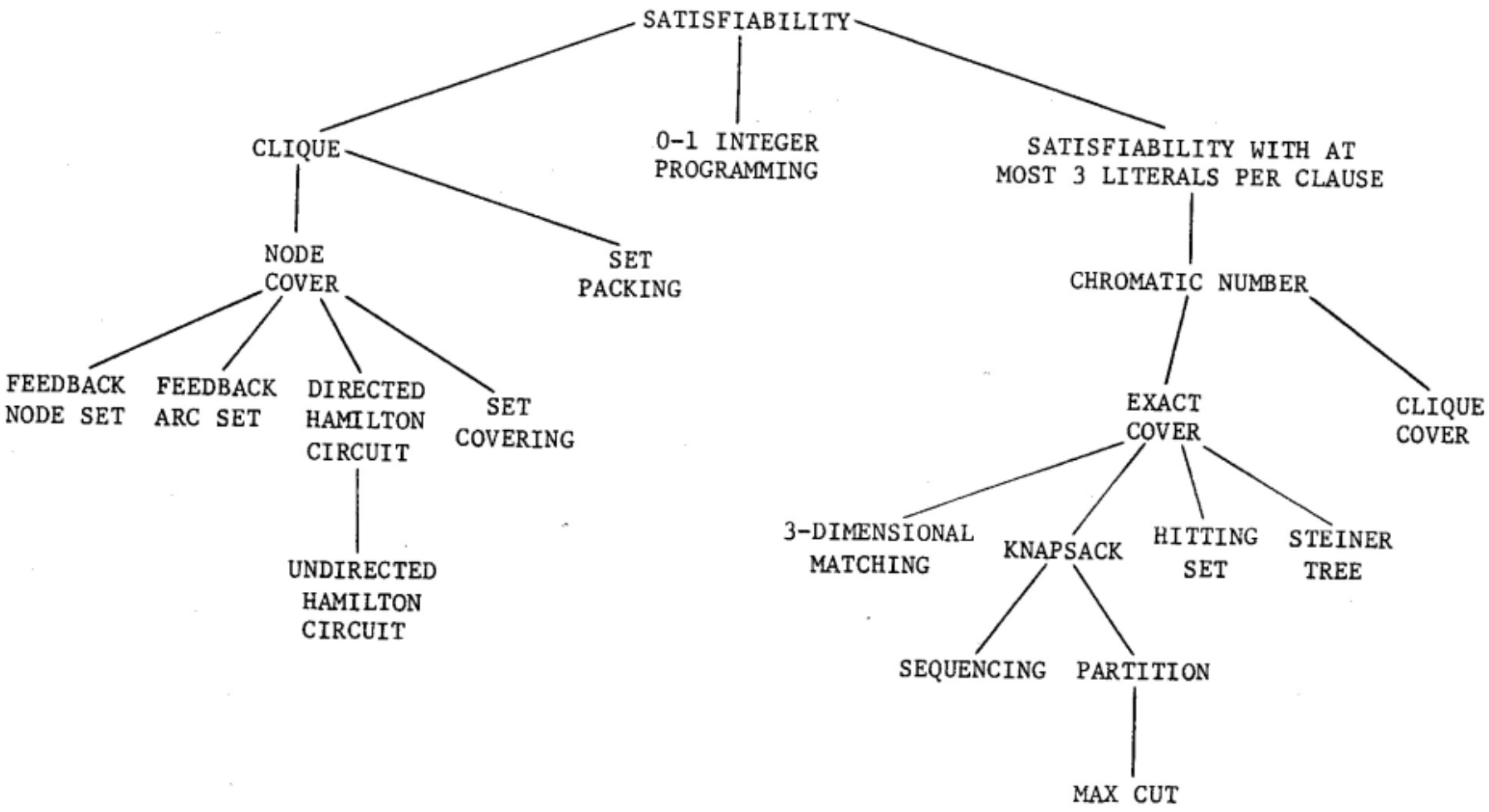


FIGURE 1 - Complete Problems

NP-completitud, IV

El problema del `millón de dólares`

De aquellos 21 problemas que en 1972 nadie sabía cómo resolver eficientemente. . .

NP-completitud, IV

El problema del `millón de dólares`

De aquellos 21 problemas que en 1972 nadie sabía cómo resolver eficientemente. . .

. . . en 2024 seguimos sin saber cómo resolver eficientemente ninguno.

NP-completitud, IV

El problema del `millón de dólares`

De aquellos 21 problemas que en 1972 nadie sabía cómo resolver eficientemente. . .

. . . en 2024 seguimos sin saber cómo resolver eficientemente ninguno.

Peor aún: no tenemos ni idea de por qué resulta tan difícil averiguar qué sea lo que está pasando.

NP-completitud, IV

El problema del `millón de dólares`

De aquellos 21 problemas que en 1972 nadie sabía cómo resolver eficientemente. . .

. . . en 2024 seguimos sin saber cómo resolver eficientemente ninguno.

Peor aún: no tenemos ni idea de por qué resulta tan difícil averiguar qué sea lo que está pasando.

Y cientos de problemas adicionales han resultado equivalentes a ellos, incluyendo muchos problemas de Lógica, de Representación del Conocimiento y de otras áreas de Inteligencia Artificial.

`https://xkcd.com/287`

NP-completitud, V

Reducibilidad en tiempo polinómico

Recordemos: $L \leq_m L'$ si hay una función recursiva total f tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$:

Si $L \leq_m L'$ y L' es decidible, también lo es L.

Si $L \leq_m L'$ y L es indecidible, también lo es L'.

NP-completitud, V

Reducibilidad en tiempo polinómico

Recordemos: $L \leq_m L'$ si hay una función recursiva total f tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$:

Si $L \leq_m L'$ y L' es decidible, también lo es L.

Si $L \leq_m L'$ y L es indecidible, también lo es L'.

$L \leq_m^p L'$ si hay una función f calculable en tiempo polinómico tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$

Si $L \leq_m^p L'$ y $L' \in P$, también $L \in P$.

Si $L \leq_m^p L'$ y $L \notin P$, también $L' \notin P$.

NP-completitud, V

Reducibilidad en tiempo polinómico

Recordemos: $L \leq_m L'$ si hay una función recursiva total f tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$:

Si $L \leq_m L'$ y L' es decidible, también lo es L.

Si $L \leq_m L'$ y L es indecidible, también lo es L'.

$L \leq_m^p L'$ si hay una función f calculable en tiempo polinómico tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$

Si $L \leq_m^p L'$ y $L' \in P$, también $L \in P$.

Si $L \leq_m^p L'$ y $L \notin P$, también $L' \notin P$.

Transitividad: Si $L \leq_m^p L'$ y $L' \leq_m^p L''$, entonces $L \leq_m^p L''$.

NP-completitud, VI

Cláusulas en la lógica proposicional

Fórmulas booleanas en forma clausal:

- Conjunto de variables proposicionales: $\{x_i \mid 0 \leq i < m\}$.
- Correspondiente conjunto de literales: $\{x_i \mid 0 \leq i < m\} \cup \{\neg x_i \mid 0 \leq i < m\} = \{x_{i,\oplus}, x_{i,\ominus} \mid 0 \leq i < m\}$.
- Cláusula: disyunción de literales.
- (Caso particular: cláusulas de Horn, con todos los literales negativos excepto como máximo uno.)
- Fórmulas booleanas en forma clausal: conjunciones de cláusulas.

Sintaxis frecuentemente llamada CNF (*conjunctive normal form*) aunque no es propiamente una forma normal.

No entramos en las diversas variantes (como DNF) ni en las transformaciones entre ellas.

NP-completitud, VII

Clausal SAT by S. Cook

Dada una fórmula proposicional en forma clausal, ¿existe una asignación de valores a las variables que la haga evaluar a *cierto*?

NP-completitud, VII

Clausal SAT by S. Cook

Dada una fórmula proposicional en forma clausal, ¿existe una asignación de valores a las variables que la haga evaluar a *cierto*?

- $(x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee x_1 \vee \neg x_2)$.
- $(\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge \neg x_2 \wedge (\neg x_0 \vee x_1) \wedge x_0$.

NP-completitud, VII

Clausal SAT by S. Cook

Dada una fórmula proposicional en forma clausal, ¿existe una asignación de valores a las variables que la haga evaluar a *cierto*?

- $(x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee x_1 \vee \neg x_2)$.
- $(\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge \neg x_2 \wedge (\neg x_0 \vee x_1) \wedge x_0$.

SAT $\in NP$:

- Se recorren todas las variables y, de manera indeterminista, para cada una de ellas se decide si asignarle el valor *cierto* o el valor *falso*.
- Se recorren y evalúan sucesivamente las cláusulas y se comprueba que todas ellas contienen un literal cierto.

NP-completitud, VIII

Representamos cálculos de máquinas de Turing en formato Clausal SAT

Sea M una máquina de Turing que para en como mucho n^k pasos sobre todas las entradas de longitud n.

El uso de cinta está limitado a n^k casillas.

Para cada entrada z para M,

- podemos escribir la secuencia de configuraciones ("snapshots") a lo largo del cálculo:

NP-completitud, VIII

Representamos cálculos de máquinas de Turing en formato Clausal SAT

Sea M una máquina de Turing que para en como mucho n^k pasos sobre todas las entradas de longitud n.

El uso de cinta está limitado a n^k casillas.

Para cada entrada z para M,

- podemos escribir la secuencia de configuraciones ("snapshots") a lo largo del cálculo:
- el estado completo de la máquina y sus cintas a cada paso;

NP-completitud, VIII

Representamos cálculos de máquinas de Turing en formato Clausal SAT

Sea M una máquina de Turing que para en como mucho n^k pasos sobre todas las entradas de longitud n.

El uso de cinta está limitado a n^k casillas.

Para cada entrada z para M,

- podemos escribir la secuencia de configuraciones ("snapshots") a lo largo del cálculo:
- el estado completo de la máquina y sus cintas a cada paso;
- si la escribimos en binario, podemos representar esa secuencia como una asignación de ceros o unos a $O(n^{2k})$ variables proposicionales:

NP-completitud, VIII

Representamos cálculos de máquinas de Turing en formato Clausal SAT

Sea M una máquina de Turing que para en como mucho n^k pasos sobre todas las entradas de longitud n.

El uso de cinta está limitado a n^k casillas.

Para cada entrada z para M,

- podemos escribir la secuencia de configuraciones ("snapshots") a lo largo del cálculo:
- el estado completo de la máquina y sus cintas a cada paso;
- si la escribimos en binario, podemos representar esa secuencia como una asignación de ceros o unos a $O(n^{2k})$ variables proposicionales:

  $x_{i,j,k}$: k-ésimo bit de la descripción de la celda i en el paso j.

NP-completitud, IX

Bosquejo de explicación de cómo codificar cómputos en instancias de Clausal SAT

Con estas variables proposicionales, podemos escribir fórmulas que:

- comprueban que los valores no cambian en las celdas de cinta diferentes de la que se está leyendo: $x_{i,j,k} = x_{i,j+1,k}$;
- comprueban que todos los pasos son configuraciones correctas, con exactamente una casilla por cinta marcada como leída en ese momento;
- comprueban que la configuración inicial contiene la entrada z;
- comprueban que la configuración final acepta,
- y que los pasos se corresponden con las transiciones de M.
- ¡No es problema si las transiciones son indeterministas!

NP-completitud, IX

Bosquejo de explicación de cómo codificar cómputos en instancias de Clausal SAT

Con estas variables proposicionales, podemos escribir fórmulas que:

- comprueban que los valores no cambian en las celdas de cinta diferentes de la que se está leyendo: $x_{i,j,k} = x_{i,j+1,k}$;
- comprueban que todos los pasos son configuraciones correctas, con exactamente una casilla por cinta marcada como leída en ese momento;
- comprueban que la configuración inicial contiene la entrada z;
- comprueban que la configuración final acepta,
- y que los pasos se corresponden con las transiciones de M.
- ¡No es problema si las transiciones son indeterministas!

Será posible hacer cierta la conjunción de todas esas fórmulas si y sólo si la máquina tiene un camino aceptador.

NP-completitud, X

Todo NP se reduce a Clausal SAT

- Si $L \in NP$, hay un k y una máquina indeterminista M que funciona en tiempo $O(n^k)$ tal que $z \in L \iff M$ acepta z.
- A partir de cualquier z construimos la fórmula $F(z)$ que codifica la comprobación de una computación de M sobre z.
- Entonces $z \in L$ si y sólo si hay una computación (codificada en bits) que hace cierta la fórmula, es decir, si y sólo si $F(z) \in \mathrm{SAT}$.
- Con M fija, $F(z)$ se puede construir en tiempo polinómico.

$$z \in L \iff F(z) \in \mathrm{SAT}$$

$$L \leq_m^p \mathrm{SAT}$$

NP-completitud, XI

CLIQUE by R. Karp (Wikipedia)

Dado un grafo (V, E) y un número natural n, ¿es posible elegir n vértices, todos ellos conectados entre sí?

NP-completitud, XI

CLIQUE by R. Karp (Wikipedia)

Dado un grafo (V, E) y un número natural n, ¿es posible elegir n vértices, todos ellos conectados entre sí?

- CLIQUE $\in NP$:
  - Se recorren todos los vértices y, de manera indeterminista, para cada uno de ellos se decide si seleccionarlo o no.
  - Se recorren los vértices seleccionados y se comprueba que forman un *clique* de tamaño n.
- Si $L \in NP$, L es reducible en tiempo polinómico a CLIQUE.
  - Justificamos que SAT $\leq_m^p$ CLIQUE y, por transitividad, todo NP es reducible a CLIQUE.

NP-completitud, XII

Definición de la reducción de SAT a CLIQUE

Conjunto de variables proposicionales: $\{x_i \mid 0 \leq i < m\}$.

Correspondiente conjunto de literales L:
$\{x_i \mid 0 \leq i < m\} \cup \{\neg x_i \mid 0 \leq i < m\} = \{x_{i,\oplus}, x_{i,\ominus} \mid 0 \leq i < m\}$.

Literales $x_{i,s}$, $x_{i',s'}$ compatibles: $i \neq i'$ o $s = s'$.

NP-completitud, XII

Definición de la reducción de SAT a CLIQUE

Conjunto de variables proposicionales: $\{x_i \mid 0 \leq i < m\}$.

Correspondiente conjunto de literales L:
$\{x_i \mid 0 \leq i < m\} \cup \{\neg x_i \mid 0 \leq i < m\} = \{x_{i,\oplus}, x_{i,\ominus} \mid 0 \leq i < m\}$.

Literales $x_{i,s}$, $x_{i',s'}$ compatibles: $i \neq i'$ o $s = s'$.

Fórmula booleana en forma clausal:

$$F = \bigwedge_{0 \leq j < n} C_j, \text{ con } C_j \subseteq L \text{ para todo } j.$$

NP-completitud, XII

Definición de la reducción de SAT a CLIQUE

Conjunto de variables proposicionales: $\{x_i \mid 0 \leq i < m\}$.

Correspondiente conjunto de literales L:
$\{x_i \mid 0 \leq i < m\} \cup \{\neg x_i \mid 0 \leq i < m\} = \{x_{i,\oplus}, x_{i,\ominus} \mid 0 \leq i < m\}$.

Literales $x_{i,s}$, $x_{i',s'}$ compatibles: $i \neq i'$ o $s = s'$.

Fórmula booleana en forma clausal:

$$F = \bigwedge_{0 \leq j < n} C_j, \text{ con } C_j \subseteq L \text{ para todo } j.$$

Grafo asociado:

$$V = \{v_{j,i,\oplus} \mid x_i \in C_j\} \cup \{v_{j,i,\ominus} \mid \neg x_i \in C_j\};$$
$$E = \{(v_{j,i,s}, v_{j',i',s'}) \mid j \neq j' \text{ y } x_{i,s} \text{ y } x_{i',s'} \text{ compatibles }\}.$$

NP-completitud, XIII

Validación de la reducción de SAT a CLIQUE

$$F \in \text{SAT si y sólo si } ((V, E), n) \in \text{CLIQUE}.$$

Si F es satisfactible: consideramos una asignación de valores booleanos a las variables proposicionales que haga cierta F y fijamos un literal cierto en cada cláusula: les corresponden n vértices, cada uno en una cláusula.

Con cada variable estamos eligiendo exactamente un literal, $x_{i,\oplus}$ o $x_{i,\ominus}$; por tanto, todos los literales elegidos son compatibles entre sí, así que todos los vértices elegidos están conectados en el grafo.

NP-completitud, XIII

Validación de la reducción de SAT a CLIQUE

$$F \in \text{SAT si y sólo si } ((V, E), n) \in \text{CLIQUE}.$$

Si F es satisfactible: consideramos una asignación de valores booleanos a las variables proposicionales que haga cierta F y fijamos un literal cierto en cada cláusula: les corresponden n vértices, cada uno en una cláusula.

Con cada variable estamos eligiendo exactamente un literal, $x_{i,\oplus}$ o $x_{i,\ominus}$; por tanto, todos los literales elegidos son compatibles entre sí, así que todos los vértices elegidos están conectados en el grafo.

Si tenemos un clique de tamaño n: ha de estar formado por un vértice de cada cláusula. Además, todos esos vértices han de corresponder a literales compatibles. Haciendo ciertos todos esos literales, satisfacemos la fórmula.

NP-completitud, XIV

En P:

- SAT en cláusulas de Horn.
- 2SAT: SAT con un máximo de dos literales por cláusula.
- *Edge cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ aristas que cubren todos los vértices?

NP-completitud, XIV

En P:

- SAT en cláusulas de Horn.
- 2SAT: SAT con un máximo de dos literales por cláusula.
- *Edge cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ aristas que cubren todos los vértices?

NP-completos:

- k-SAT: SAT con un máximo de k literales por cláusula, donde $k \geq 3$ es fijo (por ejemplo, 3SAT cuando $k = 3$).

NP-completitud, XIV

En P:

- SAT en cláusulas de Horn.
- 2SAT: SAT con un máximo de dos literales por cláusula.
- *Edge cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ aristas que cubren todos los vértices?

NP-completos:

- k-SAT: SAT con un máximo de k literales por cláusula, donde $k \geq 3$ es fijo (por ejemplo, 3SAT cuando $k = 3$).
- *Subset sum*: Dados sumandos $s_i \in \mathbb{N}$ y objetivo $t \in \mathbb{N}$, ¿hay un subconjunto I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?

NP-completitud, XIV

En P:

- SAT en cláusulas de Horn.
- 2SAT: SAT con un máximo de dos literales por cláusula.
- *Edge cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ aristas que cubren todos los vértices?

NP-completos:

- k-SAT: SAT con un máximo de k literales por cláusula, donde $k \geq 3$ es fijo (por ejemplo, 3SAT cuando $k = 3$).
- *Subset sum*: Dados sumandos $s_i \in \mathbb{N}$ y objetivo $t \in \mathbb{N}$, ¿hay un subconjunto I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?
- *Vertex cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ vértices que cubren todas las aristas?

NP-completitud, XIV

En P:

- SAT en cláusulas de Horn.
- 2SAT: SAT con un máximo de dos literales por cláusula.
- *Edge cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ aristas que cubren todos los vértices?

NP-completos:

- k-SAT: SAT con un máximo de k literales por cláusula, donde $k \geq 3$ es fijo (por ejemplo, 3SAT cuando $k = 3$).
- *Subset sum*: Dados sumandos $s_i \in \mathbb{N}$ y objetivo $t \in \mathbb{N}$, ¿hay un subconjunto I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?
- *Vertex cover*: Dado un grafo G y un entero ℓ, ¿hay un conjunto de ℓ vértices que cubren todas las aristas?
- *Independent set*: Dado un grafo G y un entero k, ¿hay un conjunto de k vértices no conectados entre sí?

NP-completitud, XV

Reducción de SAT a 3SAT: máximo de 3 literales por cláusula

Dada la fórmula F en forma clausal, construimos $g(F)$.

Transformamos cada cláusula añadiendo nuevas variables:

$$x_0 \vee x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \text{ cierta} \iff$$

$$(x_0 \vee x_1 \vee y_1) \wedge (y_1 \Rightarrow x_2 \vee \cdots \vee x_n) \text{ cierta para algún } y_1 \iff$$

$$(x_0 \vee x_1 \vee y_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_2 \vee y_2) \wedge$$

$$(y_2 \Rightarrow x_3 \vee \cdots \vee x_n) \text{ cierta para algún } y_1, y_2 \iff \cdots$$

Aplicando la transformación a todas las cláusulas, no quedan fórmulas equivalentes, pero sí equisatisfactibles: una de ellas es satisfactible si y sólo si la otra lo es.

$$F \in \text{SAT} \iff g(F) \in \text{3SAT}$$

NP-completitud, XVI

Subset Sum, reducción por Eric Vigoda

¿Hay I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?

Dada F con 3 (o menos) literales por cláusula, con n variables y m cláusulas, hay que "diseñar" sumandos y un valor objetivo a sumar, de tal forma que es posible hacer cierta F si y sólo si es posible elegir sumandos cuya suma coincida con el valor objetivo.

NP-completitud, XVI

Subset Sum, reducción por Eric Vigoda

¿Hay I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?

Dada F con 3 (o menos) literales por cláusula, con n variables y m cláusulas, hay que "diseñar" sumandos y un valor objetivo a sumar, de tal forma que es posible hacer cierta F si y sólo si es posible elegir sumandos cuya suma coincida con el valor objetivo.

Elegimos un valor objetivo que tiene $n + m$ dígitos en base 10, y que son n unos y m treses:

$$\overbrace{1 \cdots 1}^{n}\overbrace{3 \cdots 3}^{m}$$

NP-completitud, XVI

Subset Sum, reducción por Eric Vigoda

¿Hay I tal que $\sum_{i \in I} s_i = t$?

Dada F con 3 (o menos) literales por cláusula, con n variables y m cláusulas, hay que "diseñar" sumandos y un valor objetivo a sumar, de tal forma que es posible hacer cierta F si y sólo si es posible elegir sumandos cuya suma coincida con el valor objetivo.

Elegimos un valor objetivo que tiene $n + m$ dígitos en base 10, y que son n unos y m treses:

$$\overbrace{1 \cdots 1}^{n}\overbrace{3 \cdots 3}^{m}$$

Elegimos como sumandos, primero, valores que tienen sólo un 1, y lo tienen en cada uno de los m dígitos de menos peso; pero ponemos dos sumandos por cada dígito ("sumandos de cláusula"):

$$\overbrace{0 \cdots 0}^{n}\overbrace{0 \cdots 1 \cdots 0}^{m}$$

NP-completitud, XVII

Subset Sum, cont.

Esto nos permite sumar 0, 1 o 2 en cada uno de esos dígitos.

Para cada variable x_i, ponemos dos sumandos adicionales ("sumandos de variable"):

$$\overbrace{0\cdots\underset{(1\text{ at }i)}{1}\cdots 0}^{n}\ \overbrace{0/1\cdots\cdots\cdots 0/1}^{m}_{(1\text{ at }j\text{ iff }x_i\text{ in }C_j)} \qquad \overbrace{0\cdots\underset{(1\text{ at }i)}{1}\cdots 0}^{n}\overbrace{0/1\cdots\cdots\cdots 0/1}^{m}_{(1\text{ at }j\text{ iff }\neg x_i\text{ in }C_j)}$$

Nos permiten llegar a sumar 3 en los dígitos de las cláusulas sólo si elegimos al menos un literal que satisfacer en cada cláusula.

NP-completitud, XVII

Subset Sum, cont.

Esto nos permite sumar 0, 1 o 2 en cada uno de esos dígitos.

Para cada variable x_i, ponemos dos sumandos adicionales ("sumandos de variable"):

$$\underbrace{0\cdots1\cdots0}_{\substack{n\\(1\text{ at }i)}}\ \underbrace{0/1\cdots\cdots\cdots0/1}_{\substack{m\\(1\text{ at }j\text{ iff }x_i\text{ in }C_j)}} \qquad \underbrace{0\cdots1\cdots0}_{\substack{n\\(1\text{ at }i)}}\underbrace{0/1\cdots\cdots\cdots0/1}_{\substack{m\\(1\text{ at }j\text{ iff }\neg x_i\text{ in }C_j)}}$$

Nos permiten llegar a sumar 3 en los dígitos de las cláusulas sólo si elegimos al menos un literal que satisfacer en cada cláusula.

- Si se satisfacen dos, podemos compensar quedándonos sólo uno de los sumandos de cláusula.
- Si se satisfacen los tres, podemos prescindir de los sumandos de cláusula.

NP-completitud, XVII

Subset Sum, cont.

Esto nos permite sumar 0, 1 o 2 en cada uno de esos dígitos.

Para cada variable x_i, ponemos dos sumandos adicionales ("sumandos de variable"):

$$\underbrace{0\cdots1\cdots0}_{n}\ \underbrace{0/1\cdots\cdots\cdots0/1}_{m} \qquad \underbrace{0\cdots1\cdots0}_{n}\underbrace{0/1\cdots\cdots\cdots0/1}_{m}$$

(1 at i) (1 at j iff x_i in C_j) (1 at i) (1 at j iff $\neg x_i$ in C_j)

Nos permiten llegar a sumar 3 en los dígitos de las cláusulas sólo si elegimos al menos un literal que satisfacer en cada cláusula.

- Si se satisfacen dos, podemos compensar quedándonos sólo uno de los sumandos de cláusula.
- Si se satisfacen los tres, podemos prescindir de los sumandos de cláusula.
- Los dígitos de más peso del valor objetivo nos fuerzan a elegir exactamente un sumando de variable por cada variable.

NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$f(G, k) = (G', k)$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$f(G, k) = (G', k)$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

IndependentSet $\leq_m$ VertexCover

$f(G, k) = (G, |V| - k)$.

NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

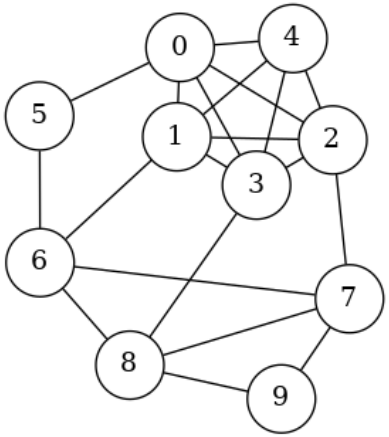
CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$$f(G, k) = (G', k)$$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

IndependentSet $\leq_m$ VertexCover

$$f(G, k) = (G, |V| - k).$$



NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

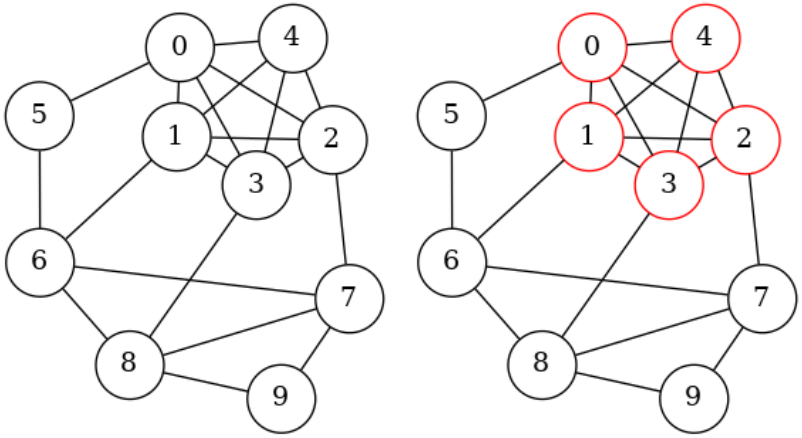
CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$$f(G, k) = (G', k)$$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

IndependentSet $\leq_m$ VertexCover

$$f(G, k) = (G, |V| - k).$$



NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

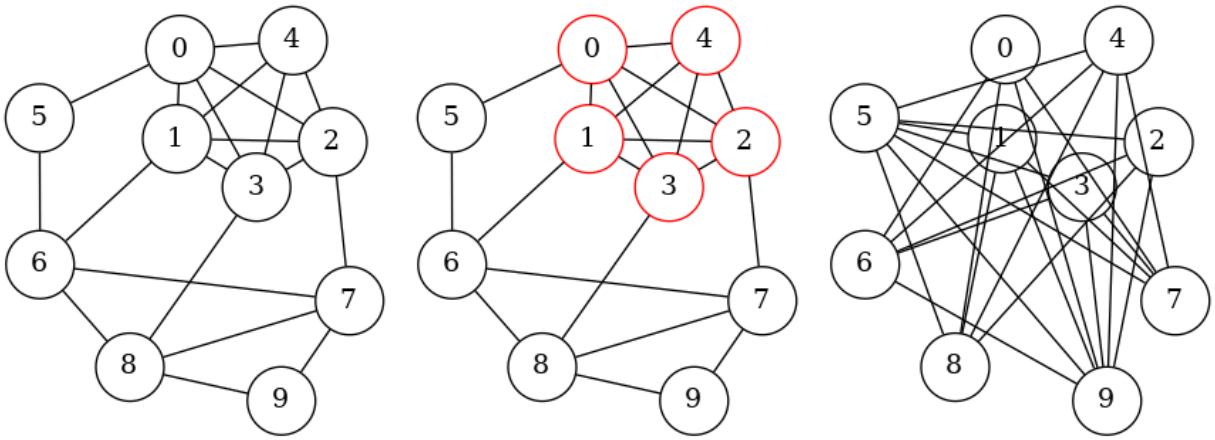
CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$$f(G, k) = (G', k)$$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

IndependentSet $\leq_m$ VertexCover

$$f(G, k) = (G, |V| - k).$$



NP-completitud, XVIII

Problemas sobre grafos

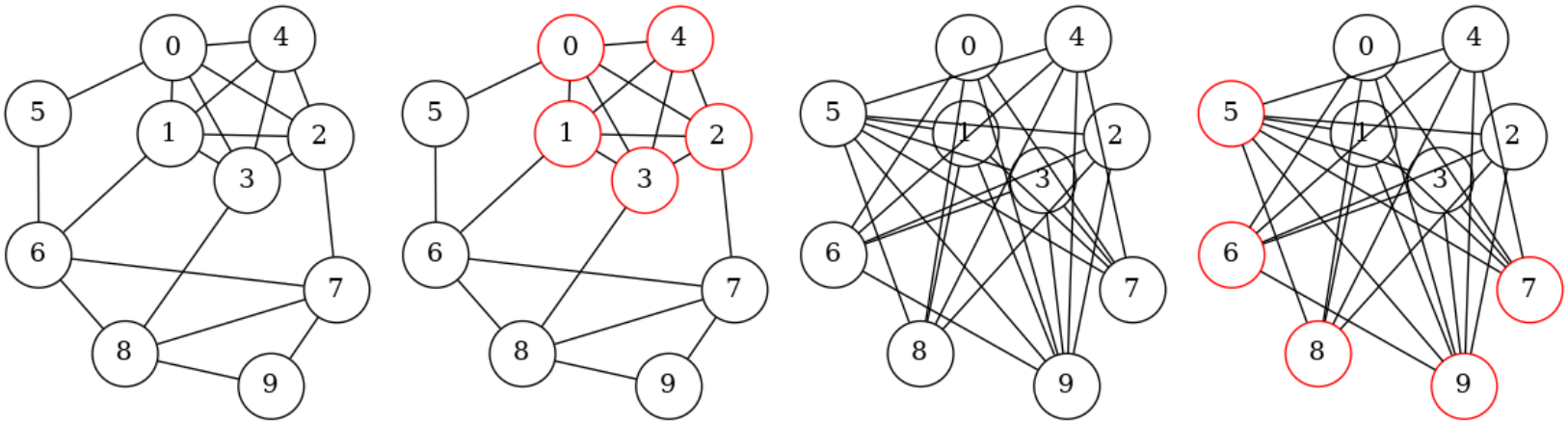
CLIQUE $\leq_m$ IndependentSet

$$f(G, k) = (G', k)$$

con los mismos vértices y las aristas complementarias.

IndependentSet $\leq_m$ VertexCover

$$f(G, k) = (G, |V| - k).$$



Clases de Complejidad, VII

¿Y si acotamos el espacio de memoria?

L, o, en caso de duda, $LOGSPACE$: $DSPACE(\log n)$.

NL, o, en caso de duda, $NLOGSPACE$: $NSPACE(\log n)$.

$PSPACE$: $\bigcup_k DSPACE(n^k)$, que coincide con $\bigcup_k NSPACE(n^k)$.

- $L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE$.
- $NL \subset PSPACE$: no son iguales. Las otras inclusiones sí es posible que sean igualdades.
- Todas esas clases son cerradas por complementación, excepto NP, que...

Clases de Complejidad, VII

¿Y si acotamos el espacio de memoria?

L, o, en caso de duda, $LOGSPACE$: $DSPACE(\log n)$.

NL, o, en caso de duda, $NLOGSPACE$: $NSPACE(\log n)$.

$PSPACE$: $\bigcup_k DSPACE(n^k)$, que coincide con $\bigcup_k NSPACE(n^k)$.

- $L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE$.
- $NL \subset PSPACE$: no son iguales. Las otras inclusiones sí es posible que sean igualdades.
- Todas esas clases son cerradas por complementación, excepto NP, que... no sabemos si lo es. Llamamos *co-NP* a la clase de sus complementarios.

Clases de Complejidad, VIII

¿Y si somos más generosos con el tiempo?

EXP, o, en caso de duda, $EXPTIME$: $\bigcup_k DTIME(2^{n^k})$.

Ojo: no es lo mismo

$$\bigcup_k DTIME(2^{n^k})$$

que

$$\bigcup_k DTIME((2^n)^k) = \bigcup_k DTIME(2^{kn}).$$

Ya un algoritmo que tarda un tiempo exponencial es extremadamente lento.

Por encima de este punto, no hay posible tarea con trascendencia práctica.

- $P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXP$.
- $P \subset EXP$: no son iguales. Las otras inclusiones sí es posible que sean igualdades.

Clases de Complejidad, IX

Completitud

La mayoría de las clases de complejidad tienen "conjuntos completos".

(Es necesario tunear un poco los recursos permitidos a las funciones que calculan las reducciones.)

- *L*: evaluación de fórmulas de la lógica proposicional.
- *NL*: caminos mínimos en grafos.
- *P*: satisfactibilidad de cláusulas de Horn.
- *PSPACE* y *EXP*: complejidades típicas de muchos problemas sobre juegos.
- Existe una conexión entre *PSPACE* y espacios de estados (A* y variantes) y, análogamente, entre *EXP* y espacios de reducción de problemas (donde aplicamos AO* y podas alfa-beta).