Teoria de la Computació

Tema 7: Indecidibilitat, no semidecidibilitat, no computabilitat.

Teoria:

- `Vídeos 32, 33 i 34.`
- `Llibre M. Sipser, "Introduction to the Theory of Computation": Section 4.2 Undecidability, Chapter 5. Reducibility.`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.
   (a) $\{p|\mathcal{L}_p \text{ es finito}\}$.
   (b) $\{p|\mathcal{L}_p \text{ es infinito}\}$.
   (c) $\{p|M_p(p) = p\}$.
   (d) $\{p|\exists y : M_y(p) = p\}$.
   (e) $\{p \mid |\mathtt{Dom}(\varphi_p)| \geq 10\}$.
   (f) $\{p \mid |\mathtt{Dom}(\varphi_p)| \geq 0\}$.
   (g) $\{p \mid |\mathtt{Im}(\varphi_p)| \geq 10\}$.
   (h) $\{p \mid |\mathtt{Im}(\varphi_p)| \geq 0\}$.
   (i) $\{p \mid |\mathtt{Im}(\varphi_p)| < |\mathtt{Dom}(\varphi_p)| < \infty\}$.
   (j) $\{p \mid |\mathtt{Dom}(\varphi_p)| < |\mathtt{Im}(\varphi_p)| < \infty\}$.
   (k) $\{p|\varphi_p \text{ es inyectiva y total}\}$.
   (l) $\{p|\varphi_p \text{ es exhaustiva y total}\}$.
   (m) $\{p|\varphi_p \text{ es creciente y total}\}$.
   (n) $\{p|\varphi_p \text{ es total y estríctamente decreciente}\}$.
   (o) $\{p|\varphi_p \text{ es inyectiva parcial}\}$.
   (p) $\{p|\varphi_p \text{ es exhaustiva parcial}\}$.
   (q) $\{p|\varphi_p \text{ es creciente parcial}\}$.
   (r) $\{p|\varphi_p \text{ es estríctamente decreciente parcial}\}$.

2. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.
   (a) $\{\langle p, q\rangle|\forall z : ((M_p(z)\downarrow \wedge M_q(z)\uparrow) \vee (M_p(z)\uparrow \wedge M_q(z)\downarrow))\}$.
   (b) $\{\langle p, z\rangle|\exists y : M_p(y) = z\}$.
   (c) $\{\langle p, z\rangle|\exists y : M_p(y) \neq z\}$.
   (d) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es incontextual}\}$.

(e) $\{p \mid \mathcal{L}_p$ no es incontextual$\}$.

(f) $\{p|\mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(g) $\{p|\mathtt{Dom}(\varphi_p) \notin \mathtt{Dec}\}$.

(h) $\{p|\mathtt{Dom}(\varphi_p) \notin \mathtt{semi} - \mathtt{Dec}\}$.

(i) $\{p|\mathtt{Im}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(j) $\{p|\mathtt{Im}(\varphi_p) \notin \mathtt{Dec}\}$.

(k) $\{p|\mathtt{Im}(\varphi_p) \in \mathtt{semi} - \mathtt{Dec}\}$.

(l) $\{p|\mathtt{Im}(\varphi_p) \notin \mathtt{semi} - \mathtt{Dec}\}$.

(m) $\{p|p \leq 100 \wedge \mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{Dec}\}$.

(n) $\{p|p \geq 100 \wedge \mathtt{Dom}(\varphi_p) \in \mathtt{semi} - \mathtt{Dec}\}$.

(o) $\{p|\forall y > p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(p) $\{p|\forall y < p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(q) $\{p|\exists y > p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(r) $\{p|\exists y < p : \varphi_y$ es biyectiva$\}$.

(s) $\{p|\exists y : \mathtt{Dom}(\varphi_p) \subseteq \mathtt{Dom}(\varphi_y)\}$.

(t) $\{p|\exists y : \mathtt{Dom}(\varphi_p) \supseteq \mathtt{Dom}(\varphi_y)\}$.

(u) $\{p|\mathtt{Dom}(\varphi_p) \subseteq \dot{2}\}$.

(v) $\{p|\mathtt{Dom}(\varphi_p) \supseteq \dot{2}\}$.

3. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semidecidibles, o no semidecidibles, los siguientes conjuntos.

   (a) $K \times K$.

   (b) $\bar{K} \times K$.

   (c) $\bar{K} \times \bar{K}$.

   (d) $\overline{\bar{K} \times K}$.

   (e) $\{x \mid$ el decimal 3 aparece x veces en el número $\pi\}$.

   (f) $\{\langle x, y\rangle \mid 0 \leq x \leq 9 \wedge$ el decimal x aparece y veces consecutivas en la secuencia de decimales del número $\pi\}$.

4. Demuestra que K no se puede reducir a $\bar{K}$.

5. Demuestra que puede ocurrir que C sea decidible, f computable, y sin embargo $f(C)$ no sea decidible.

6. Demuestra que puede ocurrir que C sea decidible, f computable y total, y sin embargo $f(C)$ no sea decidible.

7. Demuestra que si C es semidecidible y f es computable, entonces $f(C)$ es semidecidible.

8. Para cada una de las siguientes funciones indica si son computables, totales y cuál es su imagen.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : M_n(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_n(x) \downarrow \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_n(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \not\forall n : M_n(x) \downarrow \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : M_x(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_x(n) \downarrow \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_x(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \not\forall n : M_x(n) \downarrow \end{cases}$

9. La función característica de un conjunto C se define como:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Demuestra que C es decidible si y solo si su función característica χ_C es computable.

10. Justifica si los siguientes conjuntos de parejas son funciones, y si son funciones computables.

(a) φ_3.

(b) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x) = y\}$.

(c) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x) \leq y\}$.

(d) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x) \geq y\}$.

(e) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x) = M_y(y)\}$.

(f) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x)$ para en y pasos o más$\}$.

(g) $\{\langle x, y\rangle | M_x(x)$ para en exactamente y pasos$\}$.

(h) $\{\langle x, 1\rangle | M_x(x) \downarrow\} \cup \{\langle x, 0\rangle | M_x(x) \uparrow\}$.

(i) $\{\langle x, 1\rangle | M_x(x) \downarrow\}$.

(j) $\{\langle x, 0\rangle | M_x(x) \uparrow\}$.

(k) $\{\langle x, y\rangle | y = |\{z | M_x(z) \downarrow\}|\}$.