Teoria de la Computació

Tema 5: No-regularitat

Teoria:

- `Vídeos 21 i 22`
- `Llibre TC (Propietats d'iteració) Secció 7.1`
- `Llibre M. Sipser, "Introduction to the Theory of Computation": Section 1.4 Nonregular Languages.`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Demostreu la no-regularitat dels següents llenguatges:
   (a) $\{a^n b^n | n \in \dot{2}\}$.
   (b) $\{a^n b^n | n \in \dot{3}\}$.
   (c) $\{a^n b^m | n \neq m\}$.
   (d) $\{a^{2n} b^n | n \in \dot{2}\}$.
   (e) $\{w \in \{a,b\}^* | \; |w|_a = |w|_b\}$.
   (f) $\{a^n b^m | n \leq m\}$.
   (g) $\{a^n b^m | n \geq m\}$.
   (h) $\{c^m a^n b^n | (n, m \geq 0)\}$.
   (i) $\{a,b\}^* \cup \{c^m a^n b^n | (m \geq 1) \wedge (n \geq 0)\}$.
   (j) $\{w \in \{a,b\}^* | w = w^R\}$.
   (k) $\{ww \in \{a,b\}^*\}$
   (l) $\{a^{n^2} | n \geq 0\}$.
   (m) $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$.
   (n) $\{a^n | n$ apareix a la successió de Fibonacci$\}$.
   (o) $\{a^n | n$ és primer$\}$.
   (p) $\{a^n | n$ és parell o primer$\}$.
   (q) $\{abab^2ab^3 \ldots ab^n | n \geq 0\}$.
   (r) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \in \dot{2})\}$.
   (s) $\{u \# v | u, v \in \{a,b\}^* \wedge v$ és submot de $u\}$.
   (t) $\{w \in (a+b+c)^* \mid |w|_a \geq |w|_b \vee |w|_b \geq |w|_c\}$.
   (u) Qualsevol subconjunt infinit del llenguatge $\{a^n b^n\}$.
   (v) $\{w \in \{a,b\}^* \mid (|w| \in \dot{3} \Rightarrow |w|_a = |w|_b)\}$.
   (w) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2)\}$.

(x) $\{w_1\#w_2|w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = 1 + \texttt{valor}_2(w_2)\}$.

(y) $\{w_1\#w_2\#w_3|w_1, w_2, w_3 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) + \texttt{valor}_2(w_2) = \texttt{valor}_2(w_3)\}$.

(z) $\{xy \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = 2|y|_b\}$

2. Considerem el llenguatge $L_k = \{w \in (0{+}1)^*|\texttt{valor}_2(w) \leq k\}$. Quins dels següents llenguatges són regulars per a qualsevol k:

   (a) L_k.

   (b) $\bigcup_{k\geq 1} L_k$.

   (c) $\{w\#w|w \in L_k\}$.

   (d) $\{1w\#1w|1w \in L_k\}$.

   (e) $\{1w\#1w|w \in L_k\}$.

   (f) $\{w\#w|w \in L_k \ \wedge \ |w| \leq \texttt{valor}_2(w)\}$.

   (g) $\{w\#w|1w \in L_k\}$.

   (h) $\{w_1\#w_2|w_1, w_2 \in L_k \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2)\}$.

   (i) $\{w_1\#w_2|\exists k : (w_1, w_2 \in L_k \ \wedge \ \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2))\}$.

3. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són no-regulars sabent que A i B són no-regulars i que σ és un morfisme.

   (a) $\bar{A}$.

   (b) $A \cup B$.

   (c) $A \cap B$.

   (d) $A \cdot B$.

   (e) A^R.

   (f) A^*.

   (g) $S(A)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge dels exercicis del primer tema).

   (h) $\sigma(A)$.

   (i) $\sigma^{-1}(A)$.

4. Determineu quin llenguatge genera cadascuna de les següents CFG's, i justifiqueu si aquest llenguatge és regular o no.

   (a)
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB|CD \\ A & \rightarrow & 0A0|0 \\ B & \rightarrow & 1B1|\lambda \\ C & \rightarrow & 0C0|\lambda \\ D & \rightarrow & 1D1|\lambda \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aA|bB|\lambda \\ A & \rightarrow & Sa|Sb \\ B & \rightarrow & Sb \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \\ A & \to & 0A0|1 \\ B & \to & 1B1|0 \end{array}$$

(d)

$$S \to 0S0|0S1|\lambda$$

(e)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & AB \\ A & \to & 0A0|0A1|\lambda \\ B & \to & 0B|1B|\lambda \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & A|B \\ A & \to & 0S0|1S1|\lambda \\ B & \to & 0S1|1S0|\lambda \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & A|B \\ A & \to & 0A0|1A1|\lambda \\ B & \to & 0B1|1B0|\lambda \end{array}$$

(h)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aSa|bSb|X \\ X & \to & aXb|bXa|a|b|\lambda \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{rcl} S & \to & WXW' \\ X & \to & aX|bX|\lambda \\ W & \to & aW|bW|\lambda \\ W' & \to & W'a|W'b|\lambda \end{array}$$

Autómatas con pila y jerarquía de Chomsky

`[Vídeos del 23 al 26]`

1. Muestra un ejemplo de lenguaje inambiguo que no sea DCFL.
2. Muestra un ejemplo de DCFL que no sea regular.
3. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por morfismo directo.
4. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por intersección.
5. Muestra que los DCFL no son cerrados por reverso.
6. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por concatenación.
7. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por estrella.

8. Sigui A regular, B CFL, C DCFL i σ un morfisme. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són regulars, quins podem assegurar que són DCFL, i quins podem assegurar que són CFL? Raoneu les respostes, i doneu contraexemples quan sigui necessari.

    (a) $\sigma^{-1}(B) \cap A$.

    (b) $\overline{\sigma^{-1}(C)}$.

    (c) C^R.

    (d) $S(C)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge donada en els problemes del primer tema).

    (e) $S(A)$.

    (f) $(\overline{A \cap C} \cup B)$.

    (g) $(\sigma(B) \cap B)C$.

    (h) $(\overline{A} - \sigma(B) \cap \overline{C})$.

    (i) $(\sigma^{-1}(\sigma(B)) \cap B)C$.

    (j) $\overline{(\overline{\sigma(A)} \cap C)}\sigma(B \cap A)$.

    (k) $\sigma(\sigma^{-1}(B) \cap A)\sigma^{-1}(C)$.

9. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si se cumple $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

10. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera infinitas palabras no aceptadas por A.

11. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera alguna palabra de tamaño par no aceptada por A.