

Llista de problemes 0

Intruccions

Els recursos útils per resoldre els exercicis d'aquest conjunt de problemes són els següents:

Vídeos de G. Godoy

- [Teoría de lenguajes \(1\)](#)
- [Teoría de lenguajes \(2\)](#)
- [Teoría de lenguajes \(3\)](#)

Llibres

- (Sipser 2013, §0)
- (Cases i Màrquez 2003, §1)
- (Hopcroft, Motwani, i Ullman 2007, § 1)

Cases, Rafel, i Lluís Màrquez. 2003. *Llenguatges, gramàtiques i autòmats : curs bàsic*. 2a ed. Edicions UPC.

Hopcroft, John E., Rajeev Motwani, i Jeffrey D. Ullman. 2007. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. 3rd edition. Pearson Addison Wesley.

Sipser, Michael. 2013. *Introduction to the theory of computation*. 3rd edition. Cengage Learning.

En els exercicis següents podeu suposar totes les propietats bàsiques ben conegudes de la unió, la intersecció i el complementari de conjunts. Per exemple, la distributivitat de la intersecció sobre la unió, la distributivitat de la unió sobre la intersecció i les lleis de De Morgan, *és a dir*, donats conjunts A, B, C es compleix que:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Recordeu també que, per mostrar una igualtat entre dos conjunts A i B , n'hi ha prou amb mostrar que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, és a dir, que per a tot $x \in A$ es compleix que $x \in B$ i, viceversa, que per a tot $y \in B$ es compleix que $y \in A$.

Tots els exercicis

Exercici 0.1 (De descripcions informals a formals). Donat un alfabet Σ , sovint es poden descriure llenguatges interessants $L \subseteq \Sigma^*$ utilitzant la notació de conjunts $L = \{w \in \Sigma^* \mid P(w)\}$, on $P(w)$ és un predicat (P) definit sobre un mot w . Per exemple, el llenguatge L de tots els mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab es pot descriure com

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists x, y \in \{a, b\}^* w = xaby\}.$$

Descriu els llenguatges formals sobre $\Sigma = \{a, b\}$ per les descripcions informals següents de $P(w)$:

- (a) A la dreta de cada submot ab de w hi ha algun submot ba .
- (b) El mot w conté el submot ab i el submot ba .
- (c) Entre cada dues b 's hi ha alguna a .
- (d) Tota ocurrència de b és en posició parella (el primer símbol d'un mot ocupa la posició 1).
- (e) El mot w té algun prefix amb almenys tantes b 's com a 's.
- (f) En cada prefix de w hi ha almenys tantes b 's com a 's.
- (g) El mot w té algun prefix de mida parella amb almenys tantes b 's com a 's.
- (h) Tot prefix de w de mida parella té almenys tantes b 's com a 's.
- (i) El mot w té un prefix i un sufix idèntics i no buits de mida més petita que la del mateix mot.
- (j) El mot w és un palíndrom, és a dir, es llegeix igual d'esquerra a dreta com de dreta a esquerra, com ara *tot* o *anilina* en català.

Per definir la propietat $P(w)$ formalment, feu servir quantificadors universals i existencials ($\forall, \exists$), operadors Booleans ($\vee, \wedge, \implies, \dots$) i les notacions sobre mides de mots introduïdes a classe.

Exercici 0.2 (Concatenació — propietats bàsiques). Justifiqueu les vostres respostes a les preguntes següents. Els mots i els llenguatges corresponen a un alfabet fixat.

- (a) *És la concatenació commutativa?* Es compleix que $xy = yx$ per tots els mots x, y ? Es compleix que $AB = BA$ per tots els llenguatges A, B ? Depenen les respostes anteriors de la mida de l'alfabet?
- (b) *És la concatenació de llenguatges associativa?* Es compleix que $x(yz) = (xy)z$ per tots els mots x, y, z ? Es compleix $A(BC) = (AB)C$ per tots els llenguatges A, B, C ? Depenen les respostes anteriors de la mida de l'alfabet?
- (c) *Es compleix la llei de cancel·lació per la concatenació de mots?* És a dir, es compleix que $xy = xz$ implica $y = z$ per tots els mots x, y, z ?
- (d) *Es compleix la llei de cancel·lació per la concatenació de llenguatges?* És a dir, es compleix que $AB = AC$ implica $B = C$ per tots els llenguatges A, B, C ? I si addicionalment imposem que $A \neq \emptyset$, es compleix ara?
- (e) *Condició per una doble igualtat.* Donats quatre llenguatges A, B, C, D tals que A, B són no buits, $AB = CD$ i tots els mots a A i C tenen la mateixa mida, es compleix que $A = C$ and $B = D$?
- (f) *Distribueix la concatenació de llenguatges sobre la reunió?* És a dir, es compleix que $(A \cup B)C = AC \cup BC$ i $A(B \cup C) = AB \cup AC$ per tots els llenguatges A, B, C ? I si en lloc de “=” només demanem “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”, es compleix ara?
- (g) *Distribueix la concatenació de llenguatges sobre la intersecció?* És a dir, es compleix que $(A \cap B)C = AC \cap BC$ i $A(B \cap C) = AB \cap AC$ per tots els llenguatges A, B, C ? I si en lloc de “=” només demanem “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”, es compleix ara?

Exercici 0.3 (Estrella de Kleene — propietats bàsiques). Justifiqueu les vostres respostes a les preguntes següents. Els llenguatges estan definits sobre un alfabet fixat qualsevol.

- (a) *Distribueix l'estrella de Kleene sobre la concatenació de llenguatges?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $L_1^* L_2^* = (L_1 L_2)^*$? I si en lloc de “=” només es demana “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”? I si imposem $L_1 = L_2$, es compleix ara? I si quan $L_1 = L_2$, en lloc de “=” només es demana per “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”?
- (b) *Indueixen sempre les clausures positives particions no trivials?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , si $L_1^+ \cup L_2^+ = \{a, b\}^+$ i $L_1^+ \cap L_2^+ = \emptyset$, llavors o bé $L_1 = \emptyset$ o bé $L_2 = \emptyset$.
- (c) *Distribueix l'estrella de Kleene sobre la reunió de llenguatges?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$? I si en lloc de “=” només es demana “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”?
- (d) *Distribueix l'estrella de Kleene sobre la intersecció de llenguatges?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $L_1^* \cap L_2^* = (L_1 \cap L_2)^*$? I si en lloc de “=” només es demana “ $\subseteq$ ” o “ $\supseteq$ ”?
- (e) *És l'estrella de Kleene monòtona respecte de la inclusió?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , $L_1 \subseteq L_2$ implica $L_1^* \subseteq L_2^*$? *Es compleix la recíproca?* És a dir, per tot parell de llenguatges L_1, L_2 , $L_1^* \subseteq L_2^*$ implica $L_1 \subseteq L_2$? I si $L_1 = \{a, b\}$ i L_2 és un llenguatge sobre $\{a, b\}$, es compleix la recíproca en aquest context especial?
- (f) *Cadena d'inclusions.* Es compleix per tot llenguatge L que $\overline{L^*} \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{L^*}$? *I si capgirem les inclusions?* Es compleix $\overline{L^*} \supseteq \overline{L} \supseteq \overline{L^*}$?
- (g) *Condició suficient per estrelles de Kleene diferents.* Donats dos llenguatges $L_1, L_2 \neq \emptyset$ qualssevol, es compleix que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ implica $L_1^* \neq L_2^*$?
- (h) *On és el tancament positiu al quadrat?* Es compleix $L^+ L^+ \subseteq L^+$ per tot llenguatge L ? Es compleix la inclusió inversa $L^+ L^+ \supseteq L^+$?

Exercici 0.4 (Caracteritzacions). Justifiqueu les vostres respostes a les preguntes següents. Els llenguatges estan definits sobre un alfabet fixat qualsevol.

- (a) *Quan és un llenguatge igual al seu tancament positiu?* Es compleix $L = L^+$ si i només si $L^2 \subseteq L$?
- (b) *Quan és un llenguatge igual a la seva estrella de Kleene?* És $L^2 \subseteq L$ una condició necessària per la igualtat $L = L^*$? És $\lambda \in L$ una condició necessària per $L = L^*$? Quina combinació lògica ($\wedge$, $\vee$, ...) de les afirmacions $L^2 \subseteq L$ i $\lambda \in L$ constitueix una condició necessària i suficient per la igualtat $L = L^*$?
- (c) *Quan està un llenguatge inclòs en el seu quadrat?* És $\lambda \in L$ una condició suficient per la inclusió $L \subseteq L^2$? És $L = \emptyset$ una condició suficient per $L \subseteq L^2$? Quina combinació lògica ($\wedge$, $\vee$, ...) de les afirmacions $L = \emptyset$ i $\lambda \in L$ constitueix una condició suficient i necessària per la inclusió $L \subseteq L^2$?
- (d) *Quan és un llenguatge igual al seu quadrat?* És $L = L^*$ una condició suficient per la igualtat $L = L^2$? És $L = \emptyset$ una condició suficient per $L = L^2$? Quina combinació lògica ($\wedge$, $\vee$, ...) de les afirmacions $L = L^*$ i $L = \emptyset$ constitueix una condició suficient i necessària per la igualtat $L = L^2$?

Recordeu que si P i Q són dues proposicions tals que P implica Q , llavors es diu que P és una *condició suficient* per a Q , mentre que Q és una *condició necessària* per a P . També es diu que P és una *caracterització* de Q quan P és una condició tant suficient com necessària per a Q .

Exercici 0.5 (Reversat – propietats bàsiques). Justifiqueu les respostes a les preguntes següents.

- (a) *El reversat de la concatenació (1).* Demostreu que per tot parell de mots x, y , $(xy)^R = y^R x^R$. Es compleix la propietat anàloga per llenguatges? És a dir, donats dos llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$?
- (b) *El reversat de la concatenació (2).* És veritat que, donats dos llenguatges L_1, L_2 tals que $(L_1 L_2)^R = L_1^R L_2^R$, es compleix $L_1 = L_2$ necessàriament?
- (c) *Distribueix el reversat sobre la reunió?* És a dir, donats llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$?
- (d) *Distribueix el reversat sobre la intersecció?* És a dir, donats llenguatges L_1, L_2 , es compleix que $(L_1 \cap L_2)^R = L_1^R \cap L_2^R$?
- (e) *Commuten el complementari i el reversat de llenguatges?* És a dir, és cert que $\overline{L}^R = \overline{L^R}$?
- (f) *Commuten l'estrella de Kleene i el reversat d'un llenguatge?* És a dir, és cert que $(L^*)^R = (L^R)^*$?

Exercici 0.6 (Homomorfismes I – propietats bàsiques). Sigui $\sigma : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ una funció. Quines de les definicions següents de σ defineix un homomorfisme? És a dir, quines satisfan que per mots $x, y \in \Sigma^*$ qualssevol, $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$? Sigui $w = a_1a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$, on $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$.

(a) $\sigma(w) = a_1a_1a_2a_2 \cdots a_na_n.$

(b) $\sigma(w) = a_1a_2a_2a_3a_3 \cdots \overbrace{a_n \cdots a_n}^{n}.$

(c) $\sigma(w) = ww.$

(d) $\sigma(w) = w.$

(e) $\sigma(w) = \lambda.$

(f) $\sigma(w) = a^{|w|},$ on $a \in \Sigma.$

(g) $\sigma(w) = w^R.$

(h) $\sigma(w) = \sigma_1(\sigma_2(w)),$ on σ_1, σ_2 són homomorfismes.

Exercici 0.7 (Homomorfismes II – propietats bàsiques). Donat un homomorfisme $\sigma : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ i llenguatges $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, justifiqueu les vostres respostes a les preguntes següents.

- (a) *Distribueix l'homomorfisme de llenguatges sobre la concatenació?* És a dir, es compleix $\sigma(L_1 L_2) = \sigma(L_1) \sigma(L_2)$?
- (b) *Commuten l'homomorfisme i l'exponenciació de llenguatges?* És a dir, es compleix $\sigma(L^n) = \sigma(L)^n$ per qualsevol natural n ?
- (c) *Commuten l'homomorfisme i la reunió de llenguatges?* És a dir, es compleix $\sigma(L_1 \cup L_2) = \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$?
- (d) *Commuten l'homomorfisme de llenguatges i l'estrella de Kleene?* És a dir, es compleix $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$?
- (e) *Commuten l'homomorfisme i el revessat de llenguatges?* És a dir, es compleix $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$?
- (f) *Commuten l'homomorfisme i la complementació de llenguatges?* És a dir, es compleix $\sigma(\overline{L}) = \overline{\sigma(L)}$?
- (g) *Actua l'homomorfisme identitat sobre un llenguatge com la identitat sobre els seus mots?* És a dir, es compleix $\sigma(x) = x$ per a tot x a L si $\sigma(L) = L$?

Exercici 0.8 (Sobre la mida dels llenguatges). Justifiqueu les respostes a les preguntes següents.

- (a) Donats dos llenguatges L_1, L_2 , és cert que $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$? I si $L_1 = L_2$?
- (b) Donat un homomorfisme σ , és cert que si σ és injectiu, llavors $|\sigma(L)| = |L|$?
- (c) Donat un llenguatge L , és cert que $|L^R| = |L|$?
- (d) Donat un llenguatge L i un natural n , és cert que $|L^n| = |L|^n$?

Recordeu que una funció f és *injectiva* si $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

Exercici 0.9 (Desplaçament d'un llenguatge). Donat un llenguatge L , definim el *desplaçament* de L , que denotem $S(L)$ (de *shift*), com el llenguatge que conté els mots obtinguts aplicant un desplaçament circular a cada mot de L de totes les maneres possibles; formalment, $S(L) = \{vu \mid uv \in L\}$. Argumenteu si les afirmacions següents són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) per qualsevol L .

- (a) $S(L)^* \subseteq S(L^*)$.
- (b) $S(L)^* \supseteq S(L^*)$.
- (c) $\overline{S(L)} = S(\overline{L})$.
- (d) $S(L^R) = S(L)^R$.
- (e) $S(L_1 \cup L_2) = S(L_1) \cup S(L_2)$.
- (f) $S(L_1 \cap L_2) = S(L_1) \cap S(L_2)$.
- (g) $S(L_1 L_2) = S(L_1) S(L_2)$.
- (h) $S(\sigma(L)) = \sigma(S(L))$, on σ és un homomorfisme.

Exercici 0.10 (Simplificació de llenguatges). Demostreu les igualtats següents entre llenguatges:

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid aw = wb\} = \emptyset$.
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid abw = wab\} = \{ab\}^*$.

 **Alerta**

$\{ab\}^*$ no és un lapsus, no hi ha “,” entre a i b .

- (c) $\{xy \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |y|_a\} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \in 2\mathbb{N}\}$.
- (d) $\{xy \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = |y|_b\} = \{a, b\}^*$.
- (e) $\{xy \in \{a, b\}^* \mid |x|_{aa} = |y|_b\} = \{a, b\}^*$.
- (f) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{value}_2(ww^R) \in 3\mathbb{N}\} = \{0, 1\}^*$

Observeu que la notació $\{xy \in A \mid P(x, y)\}$, per un conjunt A i un predicat P , és una forma abreujada de descriure el conjunt $\{w \in A \mid \exists x, y \ w = xy \wedge P(x, y)\}$.

Exercici 0.11 ($L = \overline{\Sigma L}$). Demostreu que, per a qualsevol alfabet Σ , hi ha un únic llenguatge L que satisfà $L = \overline{\Sigma L}$. Quin és aquest llenguatge?

💡 Ajut

Doneu una expressió alternativa per a L . Conté L el mot buit λ ? Si un mot de L és de la forma aw , amb a pertanyent a Σ , on pertany w ? A L o a $\overline{L}$? Un cop obtingueu la nova expressió, deixeu-la en funció de L i resolgueu la recurrència.

Exercici 0.12 (Passejades arbitràriament llargues en grafs). Donat un graf dirigit G (amb bucles) de n vèrtexs i dos vèrtexs seus s, t , demostreu que si existeix una passejada a G de s a t de mida $> n$, llavors hi ha passejades arbitràriament llargues de s a t . En altres paraules, que existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $m \geq n_0$ hi ha una passejada a G de s a t de mida $\geq m$.

Recordeu que una *passejada* de s a t en un graf G és una seqüència de vèrtexs $v_0, \dots, v_\ell$ tal que $v_0 = s$, $v_\ell = t$ i, per tot i , (v_i, v_{i+1}) és una aresta a G . **No** es requereix que els vèrtexs o les arestes siguin diferents. La *mida* de la passejada és ℓ .

Exercici 0.13 (Inducció senzilla). Sigui $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funció tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per $x, y \in \mathbb{N}$. Demostreu que per qualsevol $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(1) \cdot x$.

Exercici 0.14 (Divisibilitat en un conjunt de nombres). Demostreu que tot conjunt de $n + 1$ naturals més petits o iguals que $2n$, on $n \geq 1$, conté dos elements diferents a i b tals que a divideix b .

 Ajut

Una possibilitat és fer servir el principi de les caselles: les cartes són els $n + 1$ nombres i les caselles són els nombres *senars* entre 1 i $2n$. Una carta de la forma $2^k d$ amb d senar es diposita en la casella d .

Una altra opció és considerar una demostració per inducció en n i distingir dos casos en el pas d'inducció: almenys un dels elements $2n + 1$ i $2n + 2$ no és al conjunt o tots dos hi són.