Problemes 4

4.1. **(Trasllat)** Considereu el següent escenari. Ha succeït una catàstrofe a una ciutat gran, els equips de rescat tenen identificats n ferits greus a diferents llocs de la ciutat, que necessiten ser traslladats urgentment a un hospital. Hi ha k hospitals disponibles. A causa de la gravetat de les ferides, és important que cada ferit arribi a un hospital abans de 30 minuts. Depenent a on el ferit està situat necessita anar a un hospital que estigui com a màxim a 30 minuts de distància per ambulància. Imagineu que vosaltres sou els responsables de la logística per traslladar els ferits als hospitals. Per a no col·lapsar urgències, voleu seleccionar els hospitals de manera que cada hospital rebi com a màxim $\lceil n/k \rceil$ ferits.

Dissenyeu un algorisme polinòmic per què un cop rebeu la informació sobre el lloc on és cada ferit, pugueu determinar si és possible que tots els ferits siguin transportats a un hospital de manera que arriben abans de 30 minuts i que cap hospital rebi més de $\lceil n/k \rceil$ ferits.

4.2. **(Evacuación)** El *problema de la evacuación* tiene la siguiente definición. Nos dan un grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa una red de carreteras. Una cierta colección de nodos $X \subseteq V$ se designan como *nodos habitados*. Otra colección de nodos S son designados como *nodos seguros*. Suponemos que S y X son disjuntos. En el caso de una emergencia, queremos conocer rutas de evacuación desde los nodos habitados a los seguros. Un conjunto de *rutas de evacuación* se define como un conjunto de caminos en G tales que: (i) cada nodo en X aparece como el inicio de un camino, (ii) el último nodo en un camino aparece en S, (iii) los caminos no comparten aristas.

Cada ruta de evacuación proporciona una ruta a travéss de la cual los habitantes de un nodo poblado pueden escapar a un nodo seguro sin compartir ninguna parte del camino con habitantes de otros nodos.

Un conjunto de *rutas de evacuacin mixtas* se define como un conjunto de caminos en el que (i) cada nodo en X aparece como el inicio de un camino, (ii) el último nodo en un camino aparece en S.

Este tipo de rutas proporciona rutas de escape en las que parte del camino es compartido entre habitantes de distintas ciudades.

Supongamos que además, debido a las restricciones de tráfico, cada arco $e \in E$ tiene asignada una capacidad de tráfico $c(e)$ que corresponde al número máximo de vehículos que pueden atravesarlo. Una petición de tráfico $r(x)$, para un nodo habitado x, representa el número de vehículos que se quieren evacuar desde x.

(a) Dados $G = (V, E, c)$ y $S, X \subseteq V$, muestra como decidir en tiempo polinómico si un conjunto de rutas de evacuación existe o no. En caso de que si que existan, el algoritmo debe proporcionar, para cada nodo poblado, la capacidad del arco de capacidad mínima de la ruta que se inicia en él.

(b) Dados $G = (V, E, c)$, $S, X \subseteq V$, y una petición de tráfico $r(x)$, para cada $x \in X$, muestra como decidir en tiempo polinómico si existe un conjunto de rutas mixtas de evacuación que permitan enviar los vehículos solicitados desde X a nodos seguros y que, además, para cada arco, se cumpla la condición de que el número de vehículos que lo atraviesan no supere la capacidad de tráfico del arco. En caso de que sea posible la evacuación con rutas mixtas, el algoritmo tiene que devolver además, para cada nodo $x \in X$, un plan de evacuación indicando: para cada vehículo saliendo de x, un camino con origen en x y final en un nodo seguro. El total de tráfico asignado entre todos los caminos del plan de escape de todos los nodos $x \in X$ tiene que cubrir la totalidad de las peticiónes de tráfico y cumplir las restricciones de capacidad de los arcos.

4.3. **(Anuncis)** Una gran part del potencial d'empreses com Yahoo!, Google, Amazon, etc. es basa en el fet que milions de persones visiten cada dia les seves pàgines, (en angles aquest fet s'anomena "eyeballs"). Un cop una persona visita una pagina web d' aquestes companyes, de manera subliminal (o no tant) se intenta convèncer per a que deixen informació personal, la qual cosa permet que en el futur, si la mateixa persona torna a visitar la mateixa pagina web, rebi informació i anuncis extremadament personalitzats i adreçats a l'usuari. Per exemple, si l'usuari ha transmès informació a Yahoo!, que té 20 anys i estudia a la UPC, a Barcelona, rebrà tota mena d'informació sobre lloguers d'habitacions a Barcelona, acadèmies etc. D'altra banda, si l'usuari és un alt executiu rebrà anuncis sobre cotxes de luxe, creuers per illes exòtiques o vacances a la lluna. Una tasca algorismica interessant és personalitzar els anuncis seleccionant els més adients a cada persona.
Suposem que els administradors d'una web popular han identificat k grups de característiques diferents (perfils) $G_1, G_2, \ldots, G_k$, que no són necessàriament disjunts, per exemple G_i pot ser viure a l'Hospitalet, G_j ser dona i G_k que estudia a la UPC. La companyia propietària de la web té contractes amb m empreses anunciadores per mostrar un nombre determinat de còpies dels seus anuncis als usuaris de les seves pagines web. El contracte que la companyia i-èsima fa amb Yahoo! és del tipus:

- Per a un subconjunt $X_i \subseteq \{G_1, \ldots, G_k\}$ dels grups demogràfics, i vol que els seus anuncis apareguin únicament a grups que són a X_i.
- Donat un enter r_i l'anunciant vol que els seus anuncis es mostren al menys a r_i usuaris.

Suposem que en un moment donat, hi ha n usuaris visitant la web. Com que tenim la informació de cadascun d'aquests usuaris, és fàcil conèixer el perfil de l'usuari j (per $j = 1, 2, \ldots, n$), es dir a quin subconjunt $U_j \subseteq \{G_1, \ldots, G_k\}$, pertanyé Voldríem dissenyar un mecanisme tal que cada usuari vegi un únic anunci (d'uns pocs segons) de manera que per se satisfan restriccions imposades per els m anunciants? És dir, per a cada $i = 1, 2, \ldots m$ com a mínim r_i usuaris, on cadascun pertanyé a almenys a un grup a X_i, veu un anunci proporcionat per l'anunciant i. Donar un algoritme eficient (polinòmic) per decidir si això és possible, i si és així, per a triar un anunci que aparegui per a cada usuari.

4.4. **(Control alimentario)** El servicio de control alimentario de la Generalitat está intentando acreditar un procedimiento de medida de la calidad alimentaria de productos complejos. En el laboratorio disponen m cromatógrafos y tienen técnicas de análisis de n componentes. Para cada cromatógrafo j se conoce conjunto S_i de componentes que puede analizar.

Para acreditar el procedimiento necesitan garantizar que se han realizado como mínimo k análisis en cromatógrafos diferentes de cada una de las componentes. Dependiendo del nivel de independencia se requieren condiciones adicionales.

- Nivel A: Un cromatógrafo solo puede utilizarse para analizar un máximo de dos componentes.
- Nivel B: Los cromatógrafos del laboratorio son de tres marcas diferentes. En este nivel se requiere además que los cromatógrafos que analicen una componente no sean todos de la misma marca.

Diseñad algoritmos para resolver los siguientes problemas:

- Dados n, m, k y para cada cromatógrafo j, $1 \leq j \leq m$, los conjuntos $S_j \subseteq \{1, \ldots n\}$, determinar si es posible realizar análisis de las n componentes con el nivel de acreditación A.
- Dados n, m, k y para cada cromatógrafo j, $1 \leq j \leq m$, los conjuntos $S_j \subseteq \{1, \ldots n\}$ y la marca $m_j \in \{1, 2, 3\}$, determinar si es posible realizar análisis de las componentes con el nivel de acreditación B.

Los dos algoritmos, siempre que sea posible, deben obtener además una asignación de cromatógrafos a componentes verificando las condiciones requeridas por el nivel de acreditación.

4.5. **(Reduint el flux màxim)** Tenim un digraf $G = (V, E)$ on cada $e \in E$ té capacitat $c(e) = 1$, i amb una font $s \in V$ i un sumider $t \in V$. També en donen un paràmetre $k \in \mathbb{N}$. Doneu un algorisme amb temps polinòmic per a resoldre el següent problema: Volem eliminar k arestes de G de manera que reduïm al màxim que puguem el flux $s \to t$. En altres paraules, volem trobar un $F \subseteq E$ tal que $|F| = k$ i el flux màxim $s \to t$ en $G' = (V, E - F)$ sigui el més petit possible.

4.6. **(k-camins de tornada?)** Sigui $G = (V, E)$ un digraf, i suposem que cada $v \in V$ té el mateix nombre d'arestes que entren que d'arestes que surten, o sigui $|\{(u, v) : (u, v) \in E\}| = |\{(v, u) : (v, u) \in E\}|$. Donat un enter $k \geq 1$, siguin $x, y \in V$ tal que existeixen k camins disjunts (sense repetir arestes) $x \to y$. Es cert que també existeixen k camins disjunts $y \to x$? Si la resposta és afirmativa, doneu una demostració, altrament doneu un contraexemple.

4.7. **(Responsables de viatjes)** Un grup d'amics lloguen entre tots una embarcació d'esbarjo per sortir junts a navegar. Cada vegada que es fa un viatge cal que un dels usuaris (el mateix durant tot el viatge) s'encarregui de preparar el vaixell, n'assumeixi la conducció i l'atracada. També haurà de fer-se responsable de la neteja i reparació de desperfectes apareguts durant el viatge. A aquesta persona l'anomenem *responsable* del viatge. A ningú li ve de gust ser responsable i la nostra tasca és fer una assignació *justa* respecte de l'ús que fa cadascuna de les persones del grup.

Hi han dos elements que semblen raonables a l'hora de definir una assignació justa. Si una persona fa servir el vaixell moltes vegades, també hauria de ser responsable moltes vegades. D'altra banda, si una persona fa servir el vaixell en dies en què poques persones volen usar-lo, això també hauria d'incrementar el nombre de vegades que és responsable. Si no veus clar aquest segon criteri, pensa en el cas que 2 persones viatgen 20 vegades juntes i amb ningú més. És lògic que en siguin responsables 10 vegades cadascuna. Si per altra banda hi ha 20 persones que viatgen 20 vegades juntes, i amb ningú més, és natural que els toqui ser responsable un cop a cadascuna d'elles.

Suposem que una persona viatja r vegades. En el seu primer viatge hi ha k_1 passatgers, en el segon k_2, i així fins k_r. Sembla just que a aquesta persona sigui responsable $S = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{k_j}$ vegades. Com que aquest número pot no ser sencer, ens conformarem amb que sigui responsable com a molt $\lceil S \rceil$ vegades. Si això passa per a tothom, direm que la assignació és justa.

Assumim que el grup està format per un conjunt A de m amics, $A = \{1, \ldots m\}$. L'entrada del problema correspon a la informació de n viatges. Per a cada viatge i, sen's dona el conjunt $V_i \subseteq A$ de viatgers.

(a) Demostreu que per a qualsevol entrada $V_1, \ldots, V_n$, hi ha una assignació justa.

(b) Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic en n i m que proporcioni una assignació de responsable per a cadascun dels n viatges que sigui justa.

4.8. **(Mini xarxa mòbil)** Considerem un model molt simplificat d'una xarxa de telefonia mòbil a zones rurals amb baixa densitat de població. Se'ns dona la ubicació de les n estacions base (antenes per a mòbil), especificades com a punts $b_1, \ldots, b_n$ al pla. També se'ns dóna la ubicació dels n telèfons mòbils, especificats com a punts $p_1, \ldots, p_n$ al pla. Finalment, se'ns dóna un paràmetre $\Delta > 0$ de distancia de cobertura dels mòbils Direm que el conjunt dels telèfons mòbils esta *completament connectat* si és possible assignar a cada telèfon a una estació base de manera que:

- Cada telèfon s'assigna a una estació base diferent,
- Si el telèfon al punt p_i s'assigna a una estació base b_j, llavors la distància en línia recta entre p_i i b_j és $\leq \Delta$.

Suposem que el propietari del mòbil p_1 decideix fer un viatge en cotxe cap a l'est sense aturant-se, recorrent un total d'z unitats de distància . Com aquest telèfon mòbil es mou, s'ha d'anar actualitzant l'assignació del mòbil a diferents estacions base per tal de mantenir el mòbil connectat a la xarxa telefònica

Doneu un algoritme polinòmic per decidir si és possible mantenir la connectivitat entre tot conjunt de mòbils en tot moment totalment connectats, durant el trajecte d'aquest telèfon. Podeu assumir que tots els altres telèfons romanen estacionaris durant aquest viatge. Si és possible mantenir la

connectivitat, l'algorisme ha de produir una seqüència de l'assignació dels mòbils a les estacions base, que sigui suficient per a mantenir la connectivitat. Altrament, l'algorisme ha de tornar en quin punt (coordenada) del pla es perd la connectivitat. L'algorisme hauria de tenir una complexitat de $O(n^3)$.
Exemple: Suposem que tenim 2 mòbils a $p_1 = (0, 0)$ i $p_2 = (2, 1)$; i tenim 2 estacions-base a $b_1 = (1, 1)$ i a $b_2 = (3, 1)$ amb $\Delta = 2$. Suposem que p_1 es desplaça 4 unitats cap l'est fins al punt $(4, 0)$ aleshores podem mantenir la connectivitat entre els mòbils, al començament assignem $p_1 \to b_1$ i $p_2 \to b_2$ i quan p_1 arriba a $(2, 0)$ n'assignem $p_1 \to b_2$ i $p_2 \to b_1$.

4.9. **(MenjaBe)** MenjaBe produeix una gran varietat de menús de menjars diferents. Malauradament, només poden produir els seus menús en quantitats limitades, de manera que solen quedar-se sense els més populars, deixant clients insatisfets. Per minimitzar aquest problema, MenjaBe vol implementar un sofisticat sistema de distribució de dinars. Els clients haurien d'enviar un missatge de text amb les seves opcions de menús acceptables abans de l'hora de dinar. A continuació, fan una assignació de dinars als clients. MenjaBe té decidit compensar amb un val de 5 euros als clients als qui no pot assignar cap de les seves opcions. MenjaBe vol minimitzar la quantitat de vals que dóna.

(a) Doneu un algorisme eficient per a assignar menús als clients en un dia. En general, en un dia determinat, MenjaBe sap que ha produït m tipus de menús i la quantitat de cadascun d'ells $q_1, \ldots, q_m$. A més els n clients envien un text amb les seves preferències, el client i indica un conjunt A_i de menús acceptables. L'algorisme ha d'assignar a cada client una de les seves opcions o un val de 5 euros, de manera que es minimitzi el nombre de vals.

(b) Un dels directius de MenjaBe proposa minimitzar el diners gastats en vals oferint un descompte en el preu del menú als clients que optin per una opció de menú sorpresa. En aquest cas els clients poden rebre un qualsevol dels menús disponibles amb un descompte de 3 euros en el menú servit. En aquest cas els clients envian un mail indicant que volen un mnú sorpresa o la llista de les seves preferències. De nou, si no els poden servir un menú dintre de les seves preferències o, en els cas del menú sorpresa no els pot servir cap menu, rebran el val de 5 euros. Doneu un algorisme eficient per a determinar l'assignació menys costosa per a MenjaBe.

4.10. **(Activitats a UPC)** El Rector de la UPC de cara a fomentar la germanor entre el personal de la UPC ha decidit establir activitats mensuals per incentivar la interacció entre els diferents estaments de PDI i PAS. Les festes se celebraran normalment un cop al mes. Suposem que hi han k grups disjunts en el personal, $C_1, \ldots, C_k$. El rectorat produeix una llista L d'activitats que tindran lloc en el curs acadèmic, i per a cada activitat $a \in L$, hi ha un nombre màxim $M(a)$ i un nombre mínim $m(a)$ de gent que pot assistir a a. A més, com que els grups tenen diferents nivells d'influència, el rectorat estima, per a cada j, el nombre mínim $s(j)$ de persones del grup C_j que s'han de convidar a cada activitat. Per una altra banda és ben conegut que alguns membres de la UPC no poden participar sovint en activitats lúdiques. Tenint en compte aquest aspecte el rectorat ha determinat per cada membre i del personal de la UPC un valor $t(i)$ indicant el nombre màxim d'activitats a les què i pot participar al llarg del curs. El problema consisteix en, en cas que sigui possible, decidir a qui convidar a cada activitat de manera que es compleixin les restriccions prèvies, o sigui:

- el nombre d'assistents a l'activitat a és $\leq M(a)$ i $\geq m(a)$,
- per a cada grup j hi ha d'haver com a mínim $s(j)$ persones assistint a cada activitat.
- la persona i mai es convidada a més de $t(i)$ activitats.

Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic per aquest problema.

4.11. **(Discurs)** Davant el gran nombre de intervencions sobre la utilitat de l'ensenyament universitari, el rector de la UPC ha decidit encarregar a UPCnet un mecanisme per redactar aquest discursos.

UPCnet ha desenvolupat un model consistent en un graf dirigit $G = (V, E, \omega)$, on cada aresta és etiquetada amb una paraula, i un vèrtex distingit $t \in V$. Segons aquest model, un camí al graf que finalitza a t representa una frase amb sentit que es pot incloure al discurs. La frase es correspon amb la seqüència ordenada de mots que apareixien al camí, seguint l'ordre establert pel propi camí. Abans de preparar un discurs el rector decidirà els punts d'inici del seu discurs, tot indicant una seqüència de nodes del graf on han de començar les frases que el formaran.

Per tal d'eliminar redundàncies al discurs, l'equip rectoral aconsella que el discurs mai faci servir més d'una vegada una aresta del graf.

(a) Dissenyeu un algorisme per escriure un discurs que acompleixi les especificacions del rector i segueixi els consells de l'equip rectoral. En cas que no fos possible, s'ha de presentar una versió reduïda del discurs on també s'especifiquin els nodes d'inici de frase que no s'han pogut completar.

(b) Indiqueu com modificaríeu l'algorisme proposat a l'apartat previ si l'equip rectoral relaxa la condició prèvia de redundància i permet un nombre màxim c d'aparicions de cada aresta al discurs.

4.12. **(RACC)** El RACC està interessat a trobar un mecanisme per poder suggerir als seus clients rutes alternatives per fugir dels embussaments de trànsit al centre de Barcelona. El Servei Català de Trànsit (SCT) els hi ha proporcionat un model simplificat del centre de Barcelona, que està format per un graf $G = (V, E)$ amb un vèrtex per cada cruïlla, i una aresta per cada parell de cruïlles connectades perquè hi ha un carrer que les uneix. A més coneixen el subconjunt de cruïlles $B \subseteq V$ que donen accés a carrers que surten del centre de la ciutat.

Dels telèfons mòbils dels clients, el RACC pot obtenir informació sobre el conjunt $C \subseteq V$ format per les cruïlles més rellevants als llocs on es troben els cotxes dels seus clients. L'SCT proporciona també el conjunt de trams de carrers $E' \subseteq E$ amb un nivell baix de saturació de trànsit i el conjunt $D \subseteq V$ de cruïlles crítiques que vol evitar.

El RACC vol determinar si és possible trobar un conjunt de camins disjunts (que no comparteixen arestes) que faci servir només trams amb baix nivell de saturació tals que, per cada cruïlla $c \in C$ tinguem un camí que comença a c i que acaba a alguna de les cruïlles de B. A més cal que una cruïlla crítica (de D) aparegui com a molt a 2 d'aquests camins.

Doneu un algorisme tan eficient com pugueu que, donats G, E', B, C i D, determini si és possible obtenir els camins requerits i que, en cas que ho sigui, retorni, per a cada $c \in C$, el camí que comença a c i acaba a alguna cruïlla de B.

4.13. **(Doctors on Call)** La firma *Doctors on Call* té que resoldre el següent problema. Per a cadascun dels pròxims n dies, la firma ha determinat el nombre de doctors disponibles que requereix. Així al dia i-èsim, necessiten exactament p_i doctors. Hi han k doctors en total, i cadascú d'ells ha donat una llista amb els dies en que està disposat a treballar. Així el doctor j proporciona un conjunt L_j de dies. Doctors on Call vol, a partir d'aquesta informació, un procediment que permeti tornar a cada doctor j una llista definitiva de dies L'_j amb les propietats següents: (1) el conjunto $\Delta_j = L'_j \setminus L_j$ té com a molt c dies; i (2) quan es considera tot el conjunto de listas $L'_1, \ldots, L'_k$, per a cada dia $1 \leq i \leq n$, hi han exactament p_i doctors que tenen el dia i a la seva llista definitiva. El paràmetre c reflecteix la tolerància de l'assignació i pot variar segons las circumstancies. Per suposat, si tal solució no es possible, el sistema ha de (correctament) informar de que aquest és el cas.

(a) Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic en n i k que resolgui el problema per un valor de tolerància c donat.

(b) Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic que obtingui la tolerància mínima per que el problema tingui solució, assumint que $p_i \leq k$ per $1 \leq i \leq n$.

4.14. **(Diamant)** Hi ha un diamant preciós que s'exhibeix a un museu només en determinades ocasions. En concret, s'exhibeix durant un conjunt T de m intervals de temps disjunts; és a dir,

$$T = \{(s_i, f_i) \mid 1 \leq i \leq m, s_i < f_i\} \quad \text{i} \quad \forall (s_i, f_i) \in T, (s_j, f_j) \in T : i \neq j : [s_i, f_i] \cap [s_j, f_j] = \emptyset$$

on s_i, t_i són els instants d'inici i acabament de cadascun dels $1 \leq i \leq m$ intervals de temps, respectivament.

El servei de seguretat del museu disposa d'un conjunt $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ de guàrdies especialitzats que estan capacitats per vigilar i protegir el preuat diamant. Aquests guàrdies estan molt sol·licitats i la seva feina és molt perillosa, per la qual cosa cada guàrdia $g_i \in G$ només està disposat a vigilar el diamant durant els intervals de temps que especifica a la seva llista L_i. D'aquesta llista, però, no pot treballar més de M_i intervals. Al mateix temps, el contracte que tenen amb el museu especifica que cada guàrdia g_i ha de treballar com a mínim m_i franges horàries.

Dissenyeu un algorisme que decideixi si existeix un possible desplegament de guàrdies que garanteixi que, per a cada interval $(s_i, f_i) \in T$ en què s'exhibeix el diamant, hi hagi almenys un i com a màxim tres guàrdies vigilant-lo. Justifiqueu la correcció i analitzeu el cost del vostre algorisme.

4.15. **(BcnTrans)**

BcnTrans és una empresa de transport que s'encarrega de la distribució de mercaderies des del port de Barcelona cap a diferents destinacions. A partir de la seva experiència durant dècades, BcnTrans ha extret un mapa amb els trams entre diferents localitats viables per als seus camions. Aquesta informació s'ha modelitzat com un graf dirigit $G = (V, E)$. Una ruta de transport és un camí a G entre dos localitats. L'empresa té previstes diferents condicions de transport, i els camions necessaris per fer-ho, però volen saber el nombre màxim de rutes des del port de Barcelona cap a la destinació (o destinacions) finals, d'acord amb d'altres requisits.

- **Transport pesat:** Donat un enter k i una localitat de destinació, volen rutes des del port de Barcelona cap a la destinació final de manera que una aresta de E no formi part de més de k rutes.
- **Transport perillós:** A més de les condicions de l'apartat anterior, ara cada localitat té assignat un nivell de perillositat que indica el nombre màxim de camions que la poden travessar.
- **Transport amb destinació:** Les mateixes condicions de l'apartat anterior, però ara se sap el nombre de camions i és té un conjunt de destinacions. Per a cada destinació se sap, a més, el nombre de camions que han d'arribar-hi.

Dissenyeu algorismes per resoldre aquests problemes. Analitzeu-ne el seu cost i justifiqueu-ne la seva correctesa.

4.16. **(Flowland TU)** La Flowland Technical University (FTU) proposa treballs de recerca per a estudiants estrangers que vulguin fer el TFG durant les seves estades allà. Una de les propostes consisteix a fer un algorisme que els permeti planificar tots els seus exàmens finals del seu grau.

A aquesta universitat hi ha n assignatures diferents, cadascuna de les quals ha de programar un examen final en una de les r sales del campus, i durant una de les t franges horàries diferents destinades a avaluacions. Es pot programar com a màxim un examen final d'assignatura a cada aula durant cada franja horària; per contra, les assignatures no es poden dividir en diverses sales o fraccionar el seu examen.

A més, cada examen ha de ser supervisat per un dels p professors disponibles, cadascun dels quals només està disponible per a determinades franges horàries. Cada professor no pot supervisar més d'un examen al mateix temps, i cap d'ells no vol supervisar més de 5 exàmens en total. Les dades d'entrada del problema són, doncs:

- $n, r, t, p \in \mathbb{N}$
- $E = \{e_1 \ldots e_n\}$ on e_i és el nombre d'estudiants matriculats a l'assignatura i.
- $S = \{s_1 \ldots s_r\}$, on s_j és el nombre de seients a l'aula j. L'examen final de l'assignatura i es pot fer a l'aula j si, i només si, $e_i \leq s_j$.

- Una matriu $t \times p$ de booleans on $D(k, l) = \texttt{true}$ si, i només si, el professor l està disponible durant la k-èsima franja horària.

Com que aprovareu GRAU-A, heu decidit inscriure aquesta proposta per fer el vostre TFG en mobilitat. Dissenyeu un algorisme eficient que assigni correctament una aula, una franja horària i un supervisor per a l'examen final de cadascuna de les assignatures que s'imparteixen a la Flowland Technical University. Si no és possible establir una planificació correcta per a tots els exàmens finals, el vostre algorisme també ho ha de notificar. Analitzeu el cost de l'algorisme i justifiqueu-ne la correctesa.