Lógica en la Informática. Sesión 1

Josefina Sierra Santibáñez

4 de marzo de 2020

Lógica

La Lógica forma parte esencial de los fundamentos de la ciencia de la computación, porque no sólo proporciona un lenguaje que permite formalizar un amplio conjunto de problemas sino también métodos para razonar acerca de dichos problemas.

La lógica es la base de

- la programación lógica, las bases de datos deductivas, description logics, web semántica
- resolución de problemas prácticos mediante solvers lógicos (Barcelogic),
- programas de diseño automático y verificación de circuitos,
- verificación de software crítico en seguridad, economía, protocolos criptográficos,
- sistemas de representación del conocimiento y razonamiento utilizados en áreas de Inteligencia Artificial como Procesamiento del Lenguaje Natural, Razonamiento de Sentido Común, Planificación, Aprendizaje Automático o diseño de Ontologías.

Organización de las Clases y Sistema de Evaluación

- Las clases de teoría sirven para orientar el estudio.
- Apuntes publicados en la página web de la asignatura

  `http://www.lsi.upc.edu/~roberto/li.html`

  y en el Racó de la FIB

  `https://raco.fi.upc.edu/`

- Exámenes de cursos anteriores publicados en la página web de la asignatura

  `http://www.lsi.upc.edu/~roberto/li.html`

  complementan algunos aspectos de los apuntes (material de estudio).

Organización de las Clases y Sistema de Evaluación

- Dos exámenes parciales de teoría T_1, T_2 (en papel).
  T_2 incluye preguntas sobre T_1 para mejorar nota de T_1.
- Dos exámenes parciales de laboratorio L_1, L_2 (en ordenador).
  Prácticas sobre programación lógica, codificación de problemas prácticos como problemas SAT y resolución de problemas mediante SAT-solvers.

La calificación de la asignatura N se calcula a partir de la nota de teoría T y la nota de laboratorio L de acuerdo con la siguiente fórmula

$$N = 0{,}6 \cdot T + 0{,}4 \cdot L$$

Lógica

La definición de una lógica consta de **sintáxis** y **semántica**.

Una expresión lógica (p.e. una fórmula) puede analizarse teniendo en cuenta

- su forma, i.e. la secuencia de símbolos que aparece en el papel;
- su significado, i.e. el hecho o concepto que expresa.

La sintáxis estudia las expresiones lógicas analizando su forma. Especifica, entre otras cosas, el conjunto de símbolos del que dispone el lenguaje de una lógica y la manera en que se pueden combinar dichos símbolos para construir fórmulas (i.e. **lenguaje**).

La semántica estudia las expresiones lógicas analizando su significado. Especifica, entre otras cosas, los significados que se pueden asignar a los símbolos del lenguaje (i.e. una definición de **interpretación**) y las condiciones en las que una interpretación satisface una fórmula (i.e. una definición del concepto de **satisfacción**).

Si se elige el lenguaje de forma adecuada, la estructura sintáctica de las expresiones lógicas puede reflejar en cierta medida su significado.

Sintáxis

La sintáxis de una lógica contiene

- Una especificación de su lenguaje (**L**)
  - símbolos lógicos
  - símbolos no-lógicos, vocabulario (**P**) en esta asignatura
- Una definición de las expresiones (secuencias de símbolos) que denotan un significado.
  Por ejemplo, una definición del conjunto de expresiones denominadas fórmulas.
- Reglas o métodos de inferencia: un conjunto de reglas que especifican ciertas condiciones mediante las cuales una fórmula denominada conclusión puede inferirse a partir de otras fórmulas denominadas hipótesis.

Semántica

La semántica de una lógica consta de:

- Interpretación: una asignación I de significado a los símbolos no-lógicos del lenguaje (i.e. del vocabulario P).
- Función de evaluación: una asignación $eval_I$ de significado a ciertas expresiones (e.g. fórmulas) del lenguaje.
- Satisfacción: una especificación de las condiciones en las que una interpretación I satisface una fórmula F (se denota $\mathbf{I} \models \mathbf{F}$). Si $I \models F$, decimos que **I es un modelo de F**.

Lógica Proposicional

Sintáxis: definición de un lenguaje **L** de la lógica proposicional

- símbolos lógicos: $\neg, \wedge, \vee$ (conectivas lógicas)
- símbolos no-lógicos: un conjunto de símbolos proposicionales o de predicado $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$. En esta asignatura el conjunto de símbolos no-lógicos se denomina vocabulario.
- Fórmulas: $F(L)$ conjunto de fórmulas de un lenguaje L con vocabulario P (definición generalizada inductiva):
  1. un símbolo proposicional de P es una fórmula de L
  2. si A es una fórmulade L, entonces $\neg A$ es una fórmula de L
  3. si A y B son fórmulas de L, entonces $A \wedge B$ es una fórmula de L
  4. si A y B son fórmulas de L, entonces $A \vee B$ es una fórmula de L

Un lenguaje L de la lógica proposicional está completamente determinado por sus símbolos no-lógicos (i.e. por su vocabulario P).

El resto de los elementos del lenguaje (símbolos lógicos y definición de fórmulas) forman parte de la definición de la lógica proposicional.

Lógica Proposicional

Las conectivas lógicas $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ se definen como abreviaturas de las siguientes fórmulas que sólo utilizan las conectivas $\neg, \wedge, \vee$.

- $A \rightarrow B$ es una abreviatura de $\neg A \vee B$
- $A \leftrightarrow B$ es una abreviatura de $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Las fórmulas de la lógica proposicional no son ambiguas: para cada fórmula F existe un único árbol que representa la construcción de F de acuerdo con las reglas de la definición de fórmula de la lógica proposicional.
Cuando no utilizemos paréntesis, asumiremos las siguientes prioridades entre las conectivas (de mayor a menor prioridad) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, y aplicaremos asociatividad por la izquierda.

Cada símbolo proposicional representa una proposición, i.e. la afirmación de un hecho sencillo.

Las conectivas lógicas $\neg, \wedge, \vee$ permiten construir afirmaciones complejas (frases compuestas) a partir de proposiones (frases simples).

Lógica Proposicional

Semántica:

- Interpretación es una aplicación $I : P \longrightarrow \{1, 0\}$ que a cada símbolo proposicional p de P le asigna un valor de verdad $I(p)$.
  Una interpretación de un lenguaje L de la lógica proposicional con vocabulario P es una asignación de significado a sus símbolos no-lógicos (P).
- Función de evaluación es una aplicación $eval_I : F(L) \longrightarrow \{1, 0\}$ que asigna un valor de verdad a cada fórmula del lenguaje L (definición generalizada inductiva):
  1. si p es un símbolo proposicional de P, $eval_I(p) = I(p)$
  2. $eval_I(\neg A) = 1 - eval_I(A)$
  3. $eval_I(A \wedge B) = min(eval_I(A), eval_I(B))$
  4. $eval_I(A \vee B) = max(eval_I(A), eval_I(B))$
- Satisfacción: una interpretación I satisface una fórmula F si $eval_I(F) = 1$.
  Cuando una interpretación I satisface una fórmula F decimos que I es un modelo de F y lo denotamos $I \models F$.

Propiedades Lógicas: Satisfactible, Insatisfactible, Tautología

Sea F una fórmula definida sobre un vocabulario P.

- F es satisfactible si existe una interpretación I de L tal que $I \models F$.
- Una fórmula F es insatisfactible o una contradicción si no existe ninguna interpretación I de L tal que $I \models F$.
  Cualquier fórmula de la forma $A \wedge \neg A$ es insatisfactible.
- Una fórmula F es una tautología si toda interpretación I de L es modelo de F (i.e. $I \models F$).
  Una tautología es una fórmula que es cierta por el significado de los símbolos lógicos, i.e., su valor de verdad no depende de la interpretación concreta I con respecto a la cual se evalúa.
  Las tautologías se denominan fórmulas lógicamente válidas.
  Cualquier fórmula de la forma $A \vee \neg A$ es una tautología.

La comprobación de estas propiedades es decidible en la lógica proposicional, y se reduce a una comprobación de **satisfactibilidad**

- F es una tautología si y sólo si $\neg F$ es insatisfactible

Relaciones Lógicas: Consecuencia y Equivalencia Lógica

- Una fórmula F es consecuencia lógica de otra fórmula G si todo modelo de G es un modelo de F, i.e. si para toda interpretación I tal que $I \models G$ se tiene que $I \models F$.
  F es consecuencia lógica de G se denota $G \models F$
- Una fórmula F es lógicamente equivalente a otra fórmula G si para toda interpretación I se tiene que $I \models F$ si y sólo si $I \models G$, i.e. si F y G tienen los mismos modelos.
  F es lógicamente equivalente a G se denota $F \equiv G$

La comprobación de estas relaciones es decidible en la Lógica Proposicional (LP) y se reduce a una comprobación de **satisfactibilidad**

- $G \models F$ si y sólo si $G \wedge \neg F$ es insatisfactible
- $F \equiv G$ si y sólo si $(F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)$ es insatisfactible

Ejercicios

- ¿Dado un lenguaje L con vocabulario P de lógica proposicional, cuántas interpretaciones existen en función de $|P|$? (**ej. 1**)
- Dada una fórmula F de la lógica proposicional definida sobre un lenguaje de L y una interpretación I de L. ¿El problema de determinar si $I \models F$ es decidible? ¿Si lo es, qué complejidad tiene dicho problema?
- Supongamos que $|P| = 100$ y que nos interesa determinar si una fórmula F definida sobre P es satsifactible o no. Si el algoritmo está basado en un análisis de la tabla de verdad y evaluar F en una interpretación I dada cuesta un microsegundo (10^{-6} segundos). ¿Cuánto tiempo se necesita para determinar si F es satisfactible en el caso peor? (**ej. 26**)
- ¿Dado un lenguaje L con vocabulario P de la lógica proposicional, cuántas fórmulas distintas existen?
- ¿Cuántas funciones Booleanas de n-entradas existen? ¿Dado un vocabulario P de la lógica proposicional, cuántas fórmulas no lógicamente equivalentes existen en función $|P|$? (**ej. 27 y 28**)

Ejercicios

- Suponiendo que A es una fórmula de la lógica proposicional, **demuestra** que $A \wedge \neg A$ es insatisfactible y que $A \vee \neg A$ es una tautología **utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional**. (**ej. 2 y 3**)
- Sean F y G dos fórmulas. ¿Es cierto que $F \vee G$ es tautología si y sólo si alguna de las dos fórmulas F o G es tautología? Sólo puedes utilizar las definiciones de la lógica proposicional (**ej. 5**)
- Sean F y G dos fórmulas. Demuestra que F es consecuencia lógica de G si y sólo si $G \wedge \neg F$ es insatisfactible utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional. (**ej. 7**)
- Sean F y G dos fórmulas. Demuestra que F es lógicamente equivalente a G si y sólo si $(G \wedge \neg F) \vee (F \wedge \neg G)$ es insatisfactible utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional.
- Demuestra alguna de las siguientes equivalencias lógicas del ejercicio 18 del capítulo 2 de los apuntes (Definición de la Lógica Proposicional): distributividad 1, absorción 1 y 2, De Morgan 1, tautología 1, insatisfactible 2. (**ej. 18**)

Ejercicios

- Lema de sustitución: Si en una fórmula F sustituimos una ocurrencia de una subfórmula G por otra subfórmula G' lógicamente equivalente a G, obtenemos una nueva fórmula F' que es lógicamente equivalente a F. (**ej. 23**)
- Demuestra utilizando el lema de sustitución y las equivalencias lógicas del enunciado del ejercicio 18 que las fórmulas $F_1 \equiv q \vee (p \wedge (\neg p \vee r))$ y $F_2 \equiv (q \vee p) \wedge ((q \vee r) \vee (p \wedge \neg p))$ definidas sobre el lenguaje L con vocabulario $P = \{p, q, r\}$ son lógicamente equivalentes. (**ej. 24**)
- Resuelve el ejercicio anterior utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional.
- Sean F, G y H tres fórmulas de la lógica proposicional. Demuestra utilizando el lema de sustitución y las equivalencias lógicas del ejercicio 18 que $F \wedge G \models H$ si y sólo si $F \models (G \to H)$.
- Resuelve el ejercicio anterior utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional. (**ej. 25**)

Ejercicios

- Tres estudiantes A, B y C son acusados de introducir un virus en los ordenadores de la FIB. Durante el interrogatorio declaran lo siguiente:
  - A dice: "B lo hizo y C es inocente"
  - B dice: "Si A es culpable, entoces C también lo es"
  - C dice: "Yo no lo hice, lo hizo al menos uno de los otros"

  a) ¿Son las tres declaraciones contradictorias?

  b) ¿Asumiendo que todos son inocentes, quiénes mintieron en la declaración?

  c) ¿Asumiendo que nadie mintió, quiénes son culpables y quiénes son inocentes? (**ej. 33**)
- En los ejercicios 34 y 35 del capítulo 2 se pide definir formalmente lógicas que utilizan la misma sintáxis que la lógica proposicional pero que difieren en su definición de la semántica. Lee el ejercicio 34 y trata de resolver el 35. (**ej. 34 y 35**)

Ejercicios

Vocabulario $P = \{p_a, p_b, p_c\}$

p_a denota el hecho "A es culpable"

p_b denota el hecho "B es culpable"

p_c denota el hecho "C es culpable"

$$\begin{aligned} F_A &\equiv p_b \wedge \neg p_c \\ F_B &\equiv p_a \rightarrow p_c \\ F_C &\equiv \neg p_c \wedge (p_a \vee p_b) \end{aligned}$$

p_a	p_b	p_c	F_A	F_B	F_C
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

Ejercicios

Una fórmula está en CNF (Forma Normal Conjuntiva) si es una conjunción de cláusulas. Una cláusula es una disyunción de literales. Un literal es un símbolo proposicional o la negación de un símbolo proposicional.

- Aplica el lema de sustitución y las equivalencias lógicas doble negación, distributividad y reglas De Morgan a la fórmula $F \equiv (p \wedge q) \vee \neg(\neg p \wedge (q \vee \neg r))$ para obtener una fórmula F^c en CNF lógicamente equivalente a F.
- Aplica el lema de sustitución y equivalencias lógicas doble negación, distributividad y reglas De Morgan a las siguientes fórmulas para obtener su CNF.

$$e \leftrightarrow \neg p$$
$$e \leftrightarrow p \wedge q$$
$$e \leftrightarrow p \vee q$$

- Aplica la transformación de Tseitin a $F \equiv (p \wedge q) \vee \neg(\neg p \wedge (q \vee \neg r))$ para obtener una fórmula en CNF equisatisfactible a F.

Ejercicios

- Sea p un símbolo proposicional y C y D dos cláusulas. La regla de inferencia de resolución permite deducir la cláusula $C \vee D$ (conclusión) a partir de dos cláusulas de la forma $p \vee C$ y $\neg p \vee D$ (hipótesis).

$$\frac{p \vee C \qquad \neg p \vee D}{C \vee D} \quad \textit{Resolución}$$

  Propiedad: La conclusión de la regla de resolución es consecuencia lógica de sus hipótesis, i.e. $(p \vee C) \wedge (\neg p \vee D) \models C \vee D$.
- Demuestra la propiedad anterior utilizando sólo las definiciones de la lógica proposicional.
- Aplica exhaustivamente la regla de resolución a la forma normal conjuntiva de las fórmulas obtenidas en el ejercicio 33. ¿Puedes utilizar el conjunto de conclusiones obtenidas para responder a la última pregunta del ejercicio 33?