1. Determina cuántos árboles m-arios de tamaño n hay, para $m \geq 2$. El tamaño de un árbol es el número de nodos internos (nodos de grado m) del árbol.

   (a) Utiliza la fórmula de inversión de Lagrange para hallar la respuesta exacta.

   (b) Utiliza el teorema de la función implícita y análisis de singularidades para hallar una estimación asintótica.

2. Calcula el número de triangulaciones distintas del n-gono regular (equivalentemente, de un n-gono convexo). Escribe una especificación combinatoria para la clase $\mathcal{T}$ de las triangulaciones de polígonos regulares. Utiliza el método simbólico para obtener una ecuación funcional satisfecha por la función generatriz de $\mathcal{T}$, y obtén el coeficiente n-ésimo de dicha función generatriz para hallar la respuesta pedida.

3. El *producto marcado* de dos objetos etiquetados α y β es el conjunto de pares (α, β) correctamente etiquetados con la restricción adicional de que el átomo con menor etiqueta debe estar en la primera componente. Utilizamos el símbolo $\star$ para denotarlo. Por ejemplo,

   $(3,1,4,2)\star(1,3,2) = \{(3,1,4,2,5,7,6), (3,1,5,2,4,7,6), \ldots (6,1,7,5,2,4,3)\}$

   Dadas dos clases etiquetadas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ su producto marcado es

   $$\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}} \alpha \star \beta.$$

   Calcula la relación entre la EGF de la clase $\mathcal{C}$ y las EGFs de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

4. La *diagonal* $\Delta\mathcal{A}$ de una clase combinatoria no etiquetada $\mathcal{A}$ es

   $\Delta\mathcal{A} = \{\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\} + \{(\alpha,\alpha) \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\} + \ldots + \{(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha) \,|\, \alpha \in \mathcal{A}\} + \ldots$

   Demuestra que es una construcción combinatoria admisible.

5. El área $a(T)$ de un árbol binario T se define como:

   $$a(T) = \sum_{k\geq 0} \frac{\#\text{ nodos internos en el nivel } k \text{ de } T}{2^k}, \qquad \text{si } T \neq \square,$$

   y $a(\square) = 0$.

   (a) Obtén una recurrencia para $a(T)$.

   (b) Halla una ecuación funcional para

   $$A(z,u) = \sum_{T\in\mathcal{B}} z^{|T|} u^{a(T)},$$

   donde $\mathcal{B}$ denota la clase de los árboles binarios.

(c) Determina el área promedio para árboles binarios de tamaño n.

6. Halla el número exacto de involuciones de tamaño n. Utiliza el método de punto de silla (saddle-point) para determinar una estimación asintótica. Una involución es una permutación σ tal que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, es decir, que no contiene ciclos de longitud mayor que 2.

7. Sea L el conjunto de las palabras binarias (construídas sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$) tales que no contienen más de tres ocurrencias no solapadas de la palabra 010 (la palabra 0101010 sólo contiene dos ocurrencias no solapadas de 010, no tres). ¿Cuántas palabras de longitud n contiene L? Intenta generalizar el resultado para un patrón prohibido w más de k veces (en el caso particular previo, $w = 010$ y $k = 3$).