# Agraïments

Aquest treball ha estat realitzat en el Departament d'Astronomia i Meteorologia de la Universitat de Barcelona, i ha sigut possible gràcies al finançament en els inicis de la *European Research Training Network: The Physics of Type Ia Supernova Explosions* i en els darrers temps del *Ministerio de Educación y Ciencia* a través d'una beca Predoctoral de Formació de Personal Investigador. Sense oblidar, però, la font principal durant la major part del temps, *Grupo Zena Restaurantes*...

Des del punt de vista estrictament científic hi ha moltes persones "culpables" de la realització d'aquest treball. Per començar l'investigador principal del grup, el Dr. Ramon Canal, qui em va motivar i introduir en la cosmologia ja com a professor durant la carrera i posteriorment durant els estudis de tercer cicle. Fins i tot més responsable n'és la tutora d'aquest treball i directora de tesi, la Dra. Pilar Ruiz-Lapuente, amb qui he pogut treballar, ja durant més de dos anys i mig, en aquesta i altres feines. Un agraïment especial també al Dr. Joan Solà tant per la motivació i ànims com per les hores de converses i discussions que han permès la realització de gran part d'aquest treball. Tot i que en aquest cas des de la distància, els dos articles que han donat peu a aquest DEA són fruit també de la col·laboració amb el Dr. Ilya Shapiro.

Finalment agrair el suport, consells i comentaris de familiars i amics, tot i que potser no n'he fet molt de cas o no he seguit els consells adequats... Agrair a aquells que m'han de suportar en el dia a dia, i als que m'han hagut d'aguantar algun dissabte inspirat... I com no, especialment als qui a banda de tot això han fet que la redacció del text millorés significativament i desapareguessin algunes bajanades: l'Andreu, la Gloria, la Roser i el Rubén. Gràcies a tots.

**Resum**

En aquest treball s'analitza detalladament el comportament de la constant cosmològica des del punt de vista d'una teoria quàntica de camps. Un cop obtinguda l'evolució que experimenta a baixes energies, aquesta ens ha permès comparar les prediccions del model amb altres formes d'energia fosca, amb les SNe Ia a alt *redshift* com a eina per a fer aquesta comparació. A partir del canvi de la seva magnitud amb el *redshift* s'ha comprovat que aquesta família de models és perfectament compatible amb les observacions i, per tant, no es pot descartar la possibilitat de que la constant cosmològica evolucioni amb el temps. La consideració de diferents escenaris ha permès ajustar paràmetres com la massa dels neutrins lleugers ($m_\nu \sim 0{,}01\, eV$), contrastar la compatibilitat del model estàndard de partícules amb dades astrofísiques, i determinar paràmetres relacionats amb la física que es pugui donar a l'època de Planck. A banda dels resultats que es troben amb les dades actuals, diverses simulacions de conjunts de dades futures com les del projecte SNAP han ajudat a veure la contrastabilitat del model. Així, els projectes planejats per a obtenir SNe Ia a alt *redshift* per a l'estudi de l'energia fosca seran suficients, en la major part dels casos, per a verificar o no l'evolució de la constant cosmològica.

# Continguts

# Capítol 1

# Introducció

A finals del segle XX el que s'entenia per model cosmològic estàndard, un Univers ple de radiació i matèria que veia frenada la seva expansió degut als efectes gravitatoris, va canviar enormement. Les dades de supernoves del tipus Ia (d'ara en endavant *SNe Ia*) indicaren amb un nivell de confiança superior al 99% que l'Univers estava en expansió accelerada [1, 2] sense que es disposés de cap indici de què podria estar causant l'acceleració.

En principi es pot apel·lar a dues idees bàsiques per tal de reconciliar teoria i observacions: 1) l'actual teoria de la gravitació és incompleta o errònia, o 2) existeix alguna component d'energia amb pressió negativa que no es té en compte.

Entre els models que s'engloben en el primer grup es troben aquells que consideren l'existència de dimensions extra [3, 4], els que afegeixen modificacions a les equacions d'Einstein depenents de la curvatura [5–7] i teories escalars-tensorials de la gravetat [8–10]. Totes aquestes teories modifiquen les equacions de Friedmann que determinen la dinàmica de l'Univers. Aquest mateix efecte és el que tenen els models Cardassian [11–13], però en aquest cas la modificació que experimenta l'equació de Friedmann pot ser tant interpretada com deguda a dimensions extra com a una reinterpretació de l'energia en termes d'un fluid interactuant.

Així doncs, algunes modificacions a la teoria de la gravitació (sovint anomenades *gravetat fosca* en analogia a la *matèria* i *energia fosca*) acaben generant una nova component d'energia. De totes maneres, un dels màxims exponents d'una forma d'energia desconeguda, fosca, és el camp de quinta essència. Aquest és un camp escalar que crea un potencial i va disminuint lentament amb el temps [14–16]. A l'època actual, el camp es trobaria al mínim del potencial amb velocitat gairebé nul·la i això generaria una energia constant i una pressió negativa. Generalitzacions amb termes d'energia cinètica no canònics, k-essència, també han estat considerats [17,18]. Tots aquests models aposten per una component d'energia amb una equació d'estat tipus gas ideal, però cal tenir en compte que altres formes d'equació d'estat (la d'un gas Chaplygin per exemple) aconsegueixen també accelerar l'Univers [19, 20].

Tot i aquesta varietat de models que s'està desenvolupant (moltes vegades més aviat recuperant i aplicant a la cosmologia) encara no s'ha mencionat la possibilitat més directa i senzilla: la constant cosmològica. Originàriament introduïda per Albert Einstein a les seves equacions com un terme "geomètric" [21], s'ha convertit en un comodí que pot estar tant a la banda de la geometria com a la de l'energia, permetent així la interpretació més habitual d'energia quàntica del buit. La seva inclusió en el model cosmològic estàndard és, de totes les alternatives, la més fàcil de justificar a priori, ja que gairebé no altera una teoria de la gravitació que sembla funcionar prou bé i té una interpretació clara en la física de partícules.

De totes maneres, després que Einstein descrivís la constant cosmològica com l'error més gran de la seva vida no ha tornat a ser seriosament recuperada fins que les observacions de SNe Ia han fet necessària l'existència d'alguna font d'energia desconeguda. Aquestes dades per sí soles no donen un valor precís de la constant cosmològica (tot i que com veurem l'ordre de magnitud que determinen seria més que suficient pel que fa al cas), però aquest es restringeix quan es combinen amb altres tipus d'observacions complementàries. L'espectre de fluctuacions de la radiació còsmica de fons sembla correspondre al d'un univers pla [22], mentre que l'estudi de l'estructura a gran escala de l'Univers [23] i les determinacions de densitat de matèria en cúmuls [24] indiquen que únicament un 30% del contingut de l'Univers és matèria (tant ordinària com fosca). D'aquesta manera la constant cosmològica o qualsevol forma equivalent d'energia, omple un 70% de l'Univers. Per un univers pla amb una densitat igual a la crítica, això vol dir $\Lambda \sim 10^{-47}\,GeV^4 \sim 10^{-29}\,g/cm^3$, i el problema apareix quan es compara aquest valor amb el que la física de partícules prediu per l'energia quàntica del buit: $\Lambda \sim 10^8\,GeV^4$! Aquesta diferència de 55 ordres de magnitud és el que es coneix com el problema de la constant cosmològica.

Un dels principals reptes de la cosmologia moderna és doncs, donar una interpretació a la constant cosmològica que permeti justificar un valor tan petit com l'observat. És aquest valor petit el que està d'acord amb la física coneguda, un valor actual com el que es desprèn de la física de partícules crearia una curvatura enorme... Fins ara, tots els models alternatius que es van desenvolupant per a generar una constant cosmològica efectiva necessiten ajustar molt finament alguns paràmetres per tal de reproduir les observacions. En aquest treball s'elabora un model en què la constant cosmològica evoluciona en el temps degut als efectes del grup de renormalització que pateix qualsevol paràmetre d'una teoria quàntica de camps. Com veurem hi ha diverses possibilitats depenent de com es produexi el desacoblament en les equacions del grup de renormalització i quina sigui l'escala que dicta l'evolució. Algunes d'aquestes possibilitats segueixen requerint un ajust fi dels paràmetres, en d'altres però, la llibertat és més gran. Ens centrarem aquí en el cas en què l'escala de l'evolució és el paràmetre de Hubble i, tal com passa a la resta de sectors de l'acció del buit, suposarem que es produeix el desacoblament segons el teorema d'Appelquist-Carazzone. En aquesta situació, seran les partícules més pesants, aquelles corresponents a l'escala de Planck, les responsables de l'evolució actual.

El fet que es pugui justificar una evolució en la constant cosmològica, resol alguns dels problemes cosmològics, tal i com s'anirà veient al llarg del treball. Per començar, es dedicarà un capítol a comentar quina és la física de les SNe Ia, què és el que ens permet considerar-les candeles estandaritzables i com això ens és útil per a utilitzar-les com a eines cosmològiques. En el capítol 3 s'introduirà la constant cosmològica tant des del punt de vista de la relativitat general com del de la física de partícules i es mirarà com contribueix a la dinàmica de l'Univers. En tot moment es mantindrà la llibertat de que la constant cosmològica tingui una dependència temporal. Al capítol següent es veuran els fonaments que condueixen a les equacions del grup de renormalització per a la constant cosmològica i els diferents escenaris cosmològics que es produeixen, per passar a analitzar detalladament, capítol 5, el model central del treball. Tant aquest model com els altres introduïts, es contrasten amb les observacions de SNe Ia amb un elevat corriment al vermell (d'ara en endavant a alt *redshift*) al capítol 6. Finalment es detallen les conclusions.

# Capítol 2

# Cosmologia amb supernoves del tipus Ia

En aquest treball la principal eina per a determinar els paràmetres cosmològics que descriuen l'Univers ha estat les supernoves del tipus Ia. Per a poder utilitzar qualsevol tipus d'objecte en cosmologia, però, cal que formi un grup prou homogeni, ja que d'altra manera no es podran considerar bons indicadors de distància. En aquest capítol veurem algunes característiques de la física de les supernoves i el tractament que s'aplica a les dades (magnituds principalment) per tal de poder utilitzar-les en aplicacions cosmològiques.

## 2.1 Supernoves

A primer cop d'ull una supernova és una explosió d'una estrella que produeix una lluminositat enorme. Durant uns pocs dies, aquesta explosió arriba a ser tan lluminosa com tots els estels de la galàxia hoste junts. Per tal d'aprofundir en què és i com es produeix, però, cal distingir entre diferents tipus ja que sota el mateix nom de supernova s'engloben fenòmens molt diferents.

La primera classificació que es va fer va ser completament observacional. En principi, totes les supernoves que s'observaven tenien un tret comú: els mancava hidrogen. Poc temps després, però, es va veure que hi havia uns altres objectes aparentment idèntics als anteriors que sí en tenien. Aquesta va ser la primera subdivisió que es va fer (Rudolph Minkowski, any 1941): les supernoves tipus II serien aquelles recentment observades amb presència d'hidrogen en els espectres, mentre que les supernoves tipus I serien aquelles observades en primer lloc amb mancança d'hidrogen.

Posteriorment, es farien més subdivisions per cada un dels dos grans grups i, fins i tot, Fritz Zwicky hi afegiria uns nous grups (tipus III, IV i V) que després no mostrarien continuïtat i s'acabarien englobant com a subtipus dels dos grans o bé com a casos peculiars d'aquests. La classificació més acceptada actualment és la que es mostra en la figura 2.1.

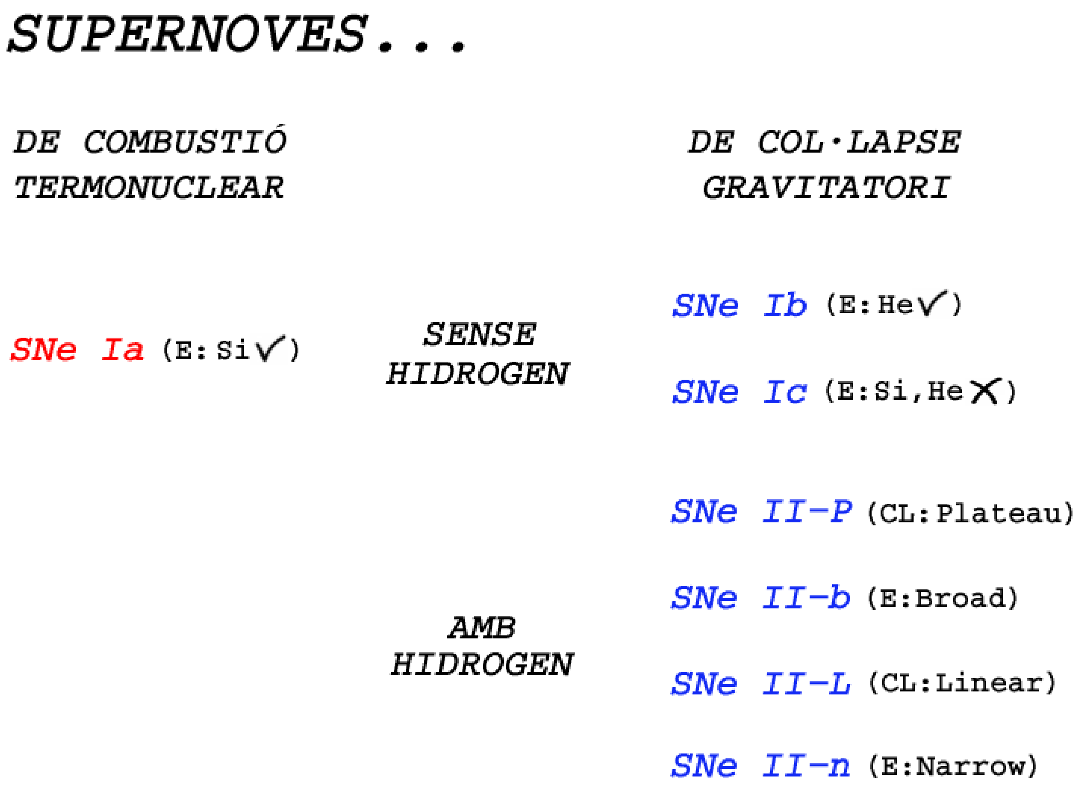


FIG. 2.1 – Esquema de classificació de supernoves. Entre parèntesi es mostra la principal característica que les distingeix dintre del seu grup on *E* indica que la distinció està en l'espectre i *CL* en la corba de llum).

En aquesta taula es mostra com els diferents tipus de supernoves estan relacionats amb les diferències que s'observen en els espectres o en les corbes de llum. També es veu, però, la veritable distinció entre supernoves, el mecanisme que les produeix. Segons aquest existeixen dos tipus de supernoves: les de col·lapse gavitatori i les de combustió termonuclear.

Les supernoves de *col·lapse gravitatori* són aquelles que arriben al final de l'evolució d'estrelles massives (típicament $7\,M_\odot < M_* < 80\,M_\odot$). Quan s'esgota el combustible del nucli perquè ja s'han cremat tots els elements possibles exotèrmicament, el centre de l'estrella cau en col·lapse gravitatori de forma homòloga. Arriba un moment en què la densitat del nucli estel·lar és de l'ordre de la nuclear atòmica i deixa de poder seguir comprimint-se. En un col·lapse homòleg les regions més internes són les que arriben primer a aquesta densitat i en aquests punts la matèria que segueix caient es troba una barrera. Les ones de pressió "reboten" i tornen cap enfora, arribant només fins al que s'anomena punt sònic per, quan la pressió és prou elevada, superar-lo i continuar ràpidament fins a l'exterior. Mentre que el nucli quedarà en forma d'objecte compacte, la part externa s'expulsarà formant així una supernova.

Cal tenir en compte, però, que les estrelles massives perden gran quantitat de massa degut a vents estel·lars. Per això quan un estel arriba a les últimes etapes de la seva vida pot haver perdut alguna de les capes externes de combustió. En el cas que no n'hagi perdut cap tenim supernoves amb hidrogen (SNe II), si ha perdut la primera capa no mostraran hidrogen (SNe Ib) i si també n'han perdut d'altres tampoc tindran heli ni silici (SNe Ic).

Un altre fet a tenir present és que les estrelles no sempre estan soles, en la meitat dels casos estan unides gravitatòriament formant sistemes binaris. Per tant, molts dels objectes que acaben com a explosió de supernova seran sistemes binaris. Generalment, les dues estrelles hauran format un nucli únic abans que es produeixi el col·lapse i, en aquest cas, perden una fracció significativa del nou embolcall comú per fricció. Segons la massa que encara quedi d'aquest embolcall ric en hidrogen es distingeixen tres subtipus de supernoves II: les SNe II-b amb $M_{embolcall} < 1\,M_{\odot}$, les SNe II-L amb $M_{embolcall} < 2-3\,M_{\odot}$ i les SNe II-n amb $M_{embolcall} > 4-5\,M_{\odot}$.

En principi, però, la subdivisió de les supernoves de tipus II es va tornar a fer no segons el mecanisme físic que hi ha al darrera, sinó segons la forma de la seva corba de llum. Les SNe II-L tenen un descens lineal (*Linear*) en el temps després d'haver assolit la magnitud màxima, mentre que les SNe II-P presenten un altiplà (*Plateau*) després del màxim. Amb posterioritat s'han establert dos subgrups nous segons la forma del seu espectre: SNe II-b i SNe II-n. Les primeres presenten línies espectrals gruixudes (*broad*) en espectres amb poc hidrogen. Representen, a més, el lligam evolutiu entre les SN II i les SNe Ib/c, ja que en èpoques tardanes el seu espectre es similar al que presenten les SNe Ib. Les SNe II-n, en canvi, tenen línies primes (*narrow*) degut a què possiblement estan envoltades d'un medi interestel·lar dens que absorbeix part de la radiació.

L'altre grup de supernoves segons el seu mecanisme d'explosió està format únicament per les SNe Ia. En aquest cas es tracta d'*explosions termonuclears* de nuclis degenerats de nanes blanques de carboni i oxigen en sistemes binaris. Per les seves característiques, es creu que aquestes supernoves formen un grup prou homogeni com per poder considerar-les candeles estàndard calibrables. A continuació veurem perquè.

## 2.2 Supernoves del tipus Ia

Les supernoves del tipus Ia es formen a partir d'estrelles que ja han cremat l'hidrogen i en acabar l'heli no aconsegueixen temperatures suficients com per iniciar la combustió del carboni. D'aquesta manera l'estel es converteix en un nan blanc, un nucli estel·lar bàsicament format pels elements que no s'han pogut cremar: carboni i oxigen. Les nanes blanques que després acabaran com a supernova tenen masses properes a la de Chandrasekhar. D'aquesta manera, quan a aquests objectes degenerats se'ls acreta matèria (provinent de la companya en un sistema binari, per exemple), superen la massa de Chandrasekhar i s'inicia una reacció que comporta el dur a terme la resta de les combustions de forma explosiva.

El tret bàsic que les diferencia dels altres subgrups pel que fa al seu espectre és la presència de silici (es pot veure una discussió general dels espectres de les SNe a [25]). És típica la línia del SiII als 6150 Å en els seus espectres, i la divisió en aquest subgrup es basa en això. Fa uns quants anys, però, l'observació d'alguns objectes com la SN1991T i SN1991bg van fer considerar la inhomogeneïtat del grup, i es va veure que hi havia un conjunt d'objectes amb característiques notablement diferents. Això va portar a separar les SNe Ia en les "normals" i les "peculiars".

El 80% de les supernoves que s'observen tenen espectres, corbes de llum, colors i magnitud absoluta del pic similars. Aquest conjunt que formen la major part de les SNe Ia és el que s'anomena "normal". Si mirem els seus espectres amb anterioritat al temps de màxima lluminositat o bé prop d'ell (primer i segon panells de la figura 2.2), el que veurem són les línies del SiII, CaII, SII i OI superposades al continu tèrmic proper a un espectre planckià. Aquestes línies s'han format per *scattering* ressonant de la radiació del continu i tenen un perfil propi de les atmosferes en expansió (perfil P-Cygni), amb els components de l'emissió prop de la longitud d'ona en el marc en repòs propi de la supernova i els components d'absorció correguts cap al blau segons la velocitat d'ejecció de la matèria a la fotosfera (aquesta velocitat és de l'ordre dels 10000 $Km/s$ en aquest subgrup de supernoves). Si ara el que mirem són els espectres nebulars, es veu que estan dominats per línies prohibides excitades per la col·lisió del ferro i el cobalt en els primers estats d'ionització (tercer panell de la figura 2.2).

Les seves corbes de llum són també característiques. Totes tenen una primera pujada modelada per l'energia cinètica del material expulsat amb un decaïment posterior al màxim dictat pel decaïment radioactiu del $^{56}Ni$. Aquest tipus de supernoves hauran expulsat durant l'explosió elements de massa intermèdia de les capes exteriors, mentre que són els elements del pic del ferro els que s'expulsen a partir de les capes més internes.

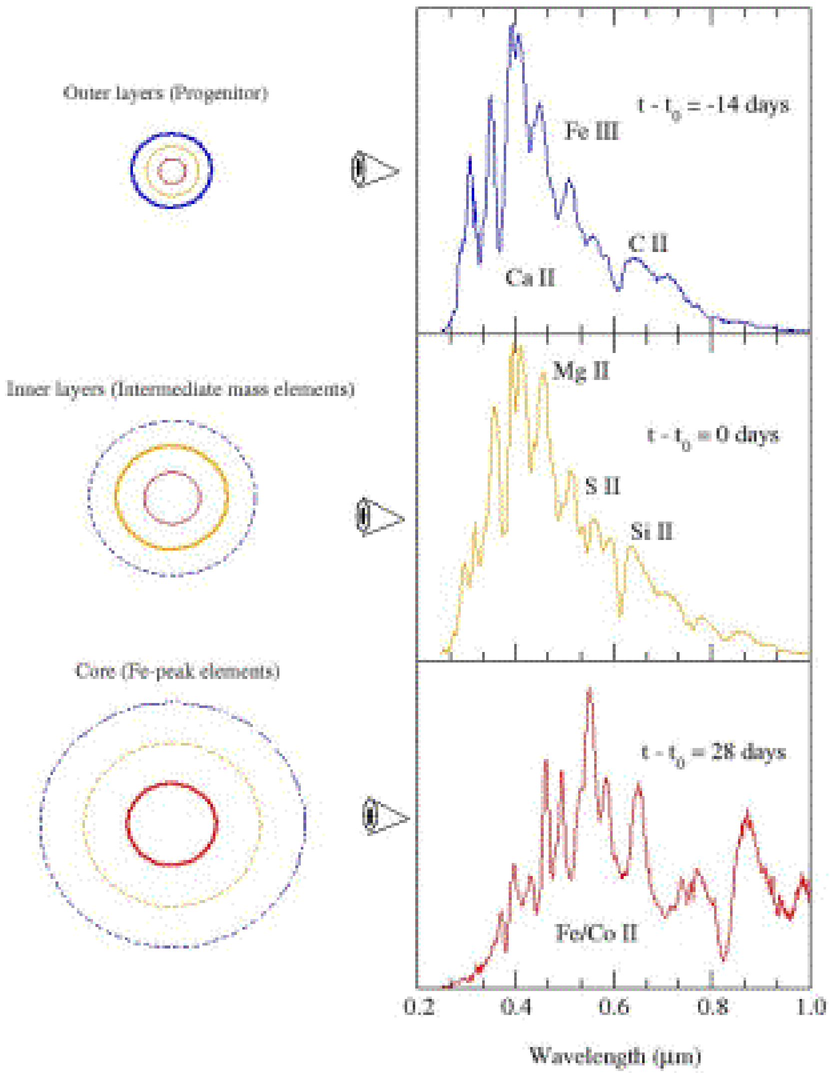


FIG. 2.2 – Espectres característics d'una SN Ia a diferents èpoques mesurades respecte el temps de màxima lluminositat $t_0$. Imatge obtinguda de [26].

Hi ha un subgrup de SNe Ia, però, que no excedeix el 20% en nombre, que presenta unes característiques lleugerament diferents respecte les considerades "normals". Exemples ben estudiats d'aquest cas són la SN1991T, la SN1991bg i la SN1992k. Algunes d'aquestes supernoves peculiars són més dèbils del que seria d'esperar. Es tracta de casos on l'embolcall d'elements de massa intermèdia és més gran i el nucli amb elements del pic del ferro és més petit. Aquestes supernoves són tan habituals com les "normals" però estan desafavorides observacionalment. Per contra, hi ha supernoves extralluminoses que són successos rars però estan afavorits observacionalment.

### 2.2.1 Corbes de llum

Fins ara s'ha parlat bàsicament dels espectres de les supernoves, però sense cap mena de dubte, la fotometria és l'element més important per les aplicacions cosmològiques. A partir dels espectres es determina principalment si l'objecte és una SNe Ia (ho serà quan no es troben línies d'hidrogen i s'observa una marcada línia de SiII acompanyada d'altres línies com el SII i el doblet CaII H&K), però és la seva lluminositat màxima la que, a través de la distància de lluminositat, servirà per a determinar paràmetres cosmològics.

El fet més destacable de les corbes de llum de les SNe Ia és la seva semblança entre els components del grup, en contraposició amb el que passa per les supernoves de col·lapse. Respecte a aquestes, a més, tenen un màxim de lluminositat major, cosa que les afavoreix per a ser observades a alt *redshift*. Tot i això, veurem a continuació que no són prou "iguals" entre sí per a considerar aquest grup de supernoves com candeles estàndard, és a dir, les SNe Ia no són un grup completament homogeni i caldrà calibrar-les.

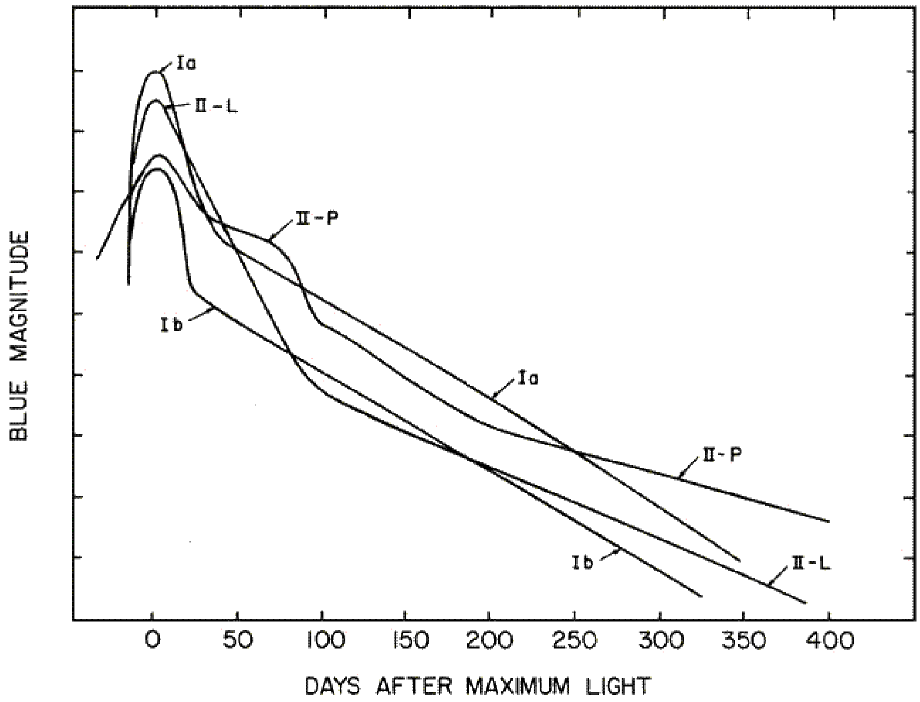


FIG. 2.3 – Figura esquemàtica de corbes de llum pels diferents tipus de supernoves comentats en l'apartat 2.1. Figura extreta de [27].

La forma típica d'una corba de llum d'una SN Ia normal (veure Figura 2.3) comença amb una ràpida pujada de lluminositat des de l'explosió fins a una desena de dies després quan s'arriba ja al màxim. A continuació comença la baixada que tindrà dues fases diferenciades pel seu pendent (pendent en magnitud, la lluminositat disminueix exponencialment perquè com es veurà és alimentada per decaïments radioactius). La primera té un pendent més acusat i canvia, vora els trenta dies posteriors a l'explosió, produint-se una disminució en lluminositat de pendent més suau. Aquesta forma que es reprodueix en totes les SNe Ia, és conseqüència de l'evolució de l'explosió [28].

Quan la nana blanca explota, la superfície augmenta ràpidament (en primera aproximació es pot considerar una esfera en expansió) i la temperatura es manté gairebé constant. En conseqüència, la lluminositat augmenta com $t^2$ degut bàsicament als fotons gamma generats pel decaïment radioactiu del $^{56}Ni$ sintetitzat en l'explosió: l'esfera és inicialment opaca, i l'energia provinent del decaïment radioactiu es transforma en part en energia cinètica de l'expansió. D'aquesta manera, la lluminositat és baixa en començar perquè el material és òpticament gruixut. A mesura que es va expandint, en disminueix la densitat i per tant es va fent òpticament més prim, cosa que permet que el flux rebut augmenti.

El màxim de lluminositat es produeix quan l'energia del decaïment radioactiu comença a poder deixar de transformar-se en cinètica (el temps de difusió és més petit que el temps hidrodinàmic). Les corbes de llum vora el màxim es poden modelitzar per una gaussiana, tot i que el comportament és diferent en diferents bandes perquè l'opacitat depèn fortament de la longitud d'ona. Uns cinc dies abans del màxim en la banda $B$ ja s'ha arribat al màxim de lluminositat en l'infraroig. Si ens fixem en els colors, l'evolució és molt més gran que en la fase anterior. Es comença amb índexs de colors negatius abans del màxim, per passar a ser positius uns dies després del màxim. Aquest comportament és molt marcat en $(B-V)$ i menys en altres com en $(R-I)$, fins i tot en el $(H-K)$ el comportament és el contrari.

Un cop passat el màxim, el temps de difusió continua disminuint, però com que cada vegada l'energia radioactiva és més petita, la corba de llum comença a baixar segons ho fa l'energia. A partir d'un determinat moment, l'energia que abans no havia pogut escapar perquè la difusió era molt baixa s'esgota i només s'observa l'energia que s'allibera en aquell instant. Això provoca el canvi de pendent en la corba de llum. Mentre que això s'observa clarament en el visible, en l'infraroig s'arriba a produir un segon màxim uns 40 dies després del primer, possiblement degut a efectes de transport radiatiu [29].

A partir d'uns 50 dies després del màxim, es produeix la caiguda exponencial en lluminositat corresponent al decaïment del $^{56}Co$. Aquest augment en magnitud, varia segons el filtre triat: 0,014 mag/dia (filtre $B$), 0,028 mag/dia (filtre $V$), 0,042 mag/dia (filtre $I$). En l'infraroig, la disminució és gairebé constant en els filtres: 0,043 mag/dia (filtre $J$) i 0,040 mag/dia (filtre $K$ i $H$). Després de 150 dies del màxim (en B), la magnitud ja ha disminuït en 5 unitats, i la supernova deixa de veure's en aquesta banda (potser emmascarada per la galàxia hoste). Amb altres filtres es mostra el canvi de pendent en la baixada: 0,014 mag/dia (filtre $V$), 0,015 mag/dia (filtre $R$) i 0,01 mag/dia (filtre $I$), però amb el filtre $B$ el pendent es manté constant.

Així doncs, l'energia que allibera la cadena de decaïment $^{56}Ni \rightarrow ^{56}Co \rightarrow ^{56}Fe$ és la que dicta la forma de les corbes de llum des d'uns dies després de l'explosió fins a les últimes fases observades. El $^{56}Ni$ té una vida mitjana de l'ordre de 6 dies, i gairebé tota l'energia que dóna la desintegració $\beta$ és en forma de raigs gamma i neutrins. El $^{56}Co$ en canvi, té una vida mitjana més llarga, 77 dies, i a banda dels resultats anteriors també produeix positrons que es dipositen i aporten una part important de l'energia. Les explosions de SNe Ia també produeixen altres espècies radioactives de vida mitjana més llarga ($^{57}Co, ^{55}Fe, ^{44}Ti, ...$) que seran importants milers de dies després del màxim, quan, en la majoria dels casos, ja no es tenen observacions. Com que per a les aplicacions cosmològiques el punt important és la lluminositat màxima, la quantitat de $^{56}Ni$ sintetitzada en l'explosió és un factor determinant per entendre la homogeneïtat o inhomogeneïtat del grup.

### 2.2.2 Magnitud absoluta. Calibració

A mesura que s'han anat obtenint més observacions de supernoves, s'ha pogut comprovar que la forma de la corba de llum, la lluminositat del pic, el ritme de descens i fins i tot els espectres en el màxim de lluminositat presenten una certa dispersió. Segons aquests resultats les SNe Ia deixaven de poder tractar-se com a candeles estàndard. Si es consideren les SNe Ia normals (recordem que són un 80% de les observades) veiem que en el blau hi ha una dispersió del pic de lluminositat inferior a 0,3 mag. Tot i això, l'observació de SNe Ia com ara SN1991T i SN1991bg demostra que no són un grup homogeni.

Malgrat que als anys 70 ja s'havia predit teòricament, no va ser fins el 1993 quan es va veure que existia una relació empírica entre el ritme de descens lineal i la lluminositat en el màxim (*relació de Phillips* [30]):

$$M_{B,corr}^{max} = a + b\Delta m_{15}(B)\,, \tag{2.1}$$

on $\Delta m_{15}(B)$ és l'augment de la magnitud de la SN des del màxim fins a 15 dies després del màxim en el filtre blau.

Segons aquesta relació les explosions més lluminoses són més lentes mentre que les menys lluminoses són més ràpides (veure el panell superior de la figura 2.4). La interpretació intuïtiva d'aquesta relació es basa en la quantitat de $^{56}Ni$. Com més

$^{56}Ni$ es generi tindrem temperatures més elevades i, per tant, els elements del pic del ferro estaran més ionitzats. Com que el Fe més ionitzat és menys efectiu en trencar fotons que el que ho està menys, l'opacitat (òptica) és major. Aquestes opacitats més grans fan que més radiació quedi atrapada, i es vagi alliberant més tard fent una corba de llum més ampla. Utilitzant aquesta relació empírica s'aconsegueix disminuir la dispersió en la magnitud del pic gairebé un 50%.

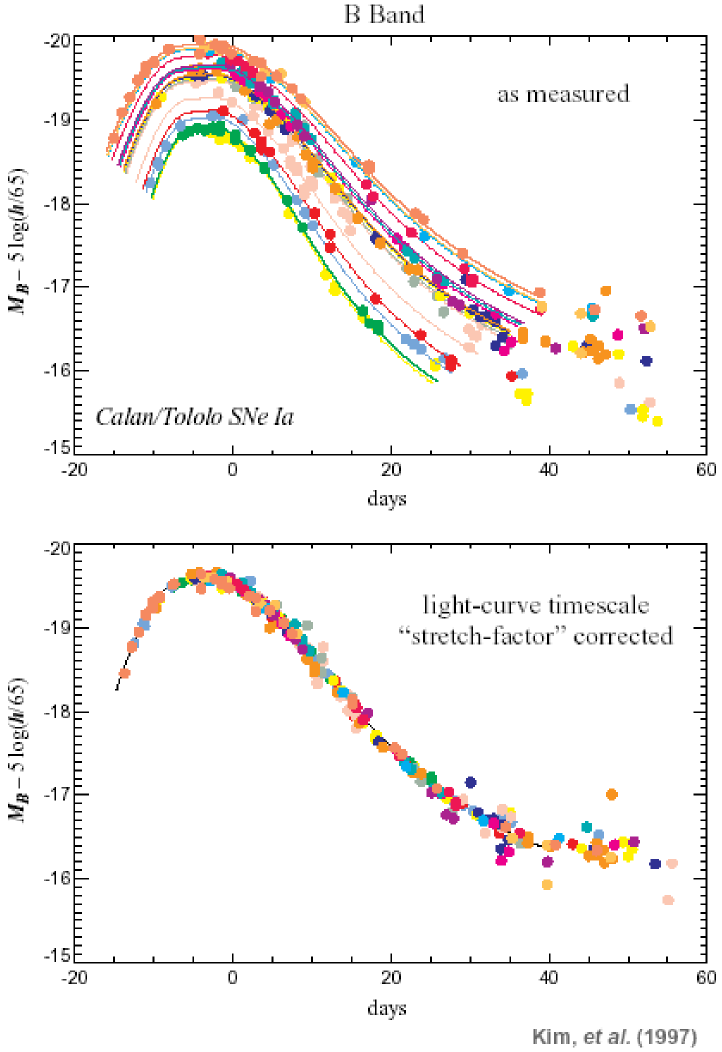


FIG. 2.4 – Corba de llum per diverses SNe Ia properes del Calán/Tololo. En el panell superior s'observa la dispersió entre elles i una aparent relació entre la rapidesa de la corba de llum i el seu màxim. En el segon panell s'ha utilitzat un dels mètodes estàndard per la calibració de corbes de llum, l'*stretch factor*, de manera que la dispersió es redueix apreciablement.

Aquest fet té conseqüències importants sobretot en la cosmologia ja que calibrant la relació de Phillips amb supernoves properes es podran utilitzar les SNe Ia com candeles estàndard. Com que aquestes són molt més brillants que les Cefeides, es veuen fins a $10^3$ cops més lluny i això permet determinar distàncies extragalàctiques i conseqüentment diferents paràmetres cosmològics (veure seccions 2.2.3 i 3.3.3).

Aquesta calibració, primer únicament possible amb la relació de Phillips, ha estat feta de diferents maneres segons diferents autors. No se sap quina és la que reflecteix millor el procés que s'està produint, però segurament s'haurà de buscar un significat físic al mètode relacionat amb l'explosió per saber què s'està fent utilitzant les diferents calibracions. Mirem quins són aquests mètodes:

### Ajust de plantilles o $\Delta m_{15}$

Aquest mètode basat en la relació de Phillips permet determinar la magnitud màxima tot i que les dades observacionals de la corba de llum corresponguin només al descens. Els punts observats es comparen amb vàries plantilles corresponents a diferents supernoves properes o a promitjos d'elles, que cobreixen SNe Ia de totes les característiques. Mitjançant la minimització de $\chi^2$ entre la corba de llum observacional i aquestes plantilles es troba la magnitud del pic [31, 32].

A partir de 18 SNe Ia properes descobertes pel Calán/Tololo prop del màxim de lluminositat es va obtenir la relació entre el $\Delta m_{15}$ i aquest màxim. La calibració està feta respecte una supernova estàndard arbitrària de $\Delta m_{15} = 1{,}1$ mag:

$$M_{B,corr} = -(19{,}26 \pm 0{,}05) + (0{,}86 \pm 0{,}21)(\Delta m_{15} - 1{,}1). \tag{2.2}$$

Així, el terme de correcció $\Delta^{1,1}_{B,corr}$ es pot escriure com $(-0{,}86 \pm 0{,}21)(\Delta m_{15} - 1, 1)$ i per tant la magnitud aparent s'haurà de corregir segons [33]:

$$m_{B,corr} = m_B + \Delta^{1,1}_{B,corr}. \tag{2.3}$$

### Mètode del factor d' estirament *(stretch factor)*

La seva característica principal és contraure o expansionar linealment l'eix temporal per tal d'alinear totes les SNe Ia en una única corba [33, 34]. Això és vàlid durant les 4 primeres setmanes després de l'explosió i només en els filtres $B$ i $V$ ja que a altres longituds d'ona s'observa un màxim secundari entre 20 i 40 dies després del primer.

El paràmetre lliure que representa el model és $w = s(1 + z)$, on $s$ és l'*stretch factor* i $w$ el factor d'amplada. La interpretació física que s'ha donat al paràmetre $s$ reflecteix la variació de l'opacitat amb la temperatura. Amb aquestes definicions, els punts d'una determinada corba de llum en una banda es passen a la banda $B$ segons,

$$\frac{I(t)}{I_{max}} = f_R\left[\frac{t - t_{max}}{w}\right] + b\,, \tag{2.4}$$

on es dóna el temps ($t_{max}$) i la intensitat ($I_{max}$) del màxim i un nivell de base ($b$). $f_R$ és la correcció $K$ per la banda $R$ a un *redshift* $z$, passada a flux i normalitzada respecte al màxim. L'ajust a la part anterior al màxim de la corba de llum es fa mitjançant un ajust quadràtic reproduint el comportament experimental de la corba:

$$\frac{I(t)}{I(0)} = a(t - t_{exp})^2\,. \tag{2.5}$$

El test $\chi^2$ indica que aquest mètode és vàlid tan abans del màxim com després fins als 40 dies posteriors.

Un cop obtingut l'*stretch* per una supernova, la seva magnitud es veu corregida en un factor addicional $\Delta^1_{B,corr} = \alpha(s-1)$, on ara la correcció es realitza respecte una supernova patró amb $s = 1$.

**Mètode de les corbes de llum multicolor (*Multicolor Light Curve Shape, MCLS*)**

Es tracta d'un mètode que utilitza les corbes de color de les SNe Ia per quantificar l'envermelliment per extinció interestel·lar [1,35]. D'aquesta manera no es fonamenta només amb la relació de Phillips, sinó que també es basa en el fet que les SNe Ia de baixa lluminositat tenen un color $(B-V)$ al màxim més vermell que les normals si les seves corbes de llum són "ràpides", mentre que tenen una lluminositat normal sent vermelles es caracteritzen per una corba de llum "lenta". D'aquesta manera es corregiran també les SNe Ia peculiars. A partir de supernoves properes, de les que es coneix la distància a partir de les Cefeides i, per tant, es pot determinar la lluminositat, s'estableixen les anomenades relacions de MLCS (Eqs. 2.6) que després s'utilitzaran en supernoves llunyanes.

$$\begin{array}{lr} \text{Primer ordre} & m_V = M_V + R_V\Delta + \mu_V \\ & m_{B-V} = M_{B-V} + R_{B-V}\Delta + E_{B-V} \\ \text{Segon ordre} & m_V = M_V + R_V\Delta + Q_V\Delta^2 + \mu_V \\ & m_{B-V} = M_{B-V} + R_{B-V}\Delta + Q_V\Delta^2 + E_{B-V} \end{array} \tag{2.6}$$

Els paràmetres del model són: $\Delta = M_V(SN) - M_V(SN_{estandard})$, $\mu_V$ (mòdul de distància), $E(B-V)$ i $t_{max}$. Aquests es troben iterativament mitjançant una minimització de $\chi^2$ (secció 6.1) a partir de considerar uns valors inicials pels coeficients de correlació entre $\Delta$ i la corba de llum (tant els quadràtics $Q$ com els lineals $R$), la magnitud absoluta $M_V$ i els colors $M_{B-V}$.

**Mètode de la coincidència bayesiana de plantilles adaptades** (*Bayesian Adapted Template Match, BATM*)

Aquest mètode [36] utilitza un conjunt de SNe Ia properes de les quals es té la corba de llum en diversos colors i que comprèn un ampli rang de lluminositats. Aquestes corbes de llum es transporten a un *redshift* determinat, amb una extinció de la galàxia hoste arbitrària i es determina com es veuríen a través dels filtres que s'utilitzen per a les observacions.

Així, en comptes de comparar la corba de llum observada amb plantilles al *redshift* de la plantilla, es trasllada les plantilles de SNe Ia properes a alt *redshift*. D'aquesta manera s'evita, per exemple, fer les correccions $K$ a les dades que encara no es coneixen

### 2.2.3 Relació magnitud-redshift

Una *candela estàndard* és un objecte del qual es coneix la seva lluminositat intrínseca, i conseqüentment, la seva magnitud absoluta. Coneguda aquesta, en mesurar la lluminositat aparent es pot determinar a quina distància es troba. Com que hem vist que les SNe Ia exploten quan l'estel arriba a una massa propera a la de Chandrasekhar, és d'esperar que totes alliberin una energia similar i, per tant, tinguin una mateixa magnitud absoluta. Les discrepàncies que s'observen s'intenten modelitzar mitjançant els quatre mètodes comentats a la secció anterior, de manera que s'acaba obtenint una magnitud en el màxim de lluminositat calibrada.

La relació entre la magnitud absoluta, l'aparent i la distància és el que es coneix com a *relació magnitud-redshift*, ja que en cosmologia és útil expressar les distàncies en funció del *redshift* que és la quantitat mesurable.

Aquesta relació s'obté a partir de la definició de la distància lluminositat com aquella a la qual es rep el flux mesurat $\mathcal{F}$ d'una font que emet una lluminositat $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\mathcal{L}}{4\pi d_L^2} \,. \tag{2.7}$$

Això és simplement una definició, ja que tot i que correspon a la distància física en un espai euclidi, quan es considera un espai corbat perd el sentit original. De totes maneres, per a definir una distància en un espai-temps cal abans conèixer-ne la mètrica, i aquesta no s'introduirà fins al capítol següent. De moment, la distància lluminositat serà una funció $d_L$ que depèn del *redshift* i dels paràmetres cosmològics (secció 3.3.3) que donen compte de la quantitat d'energia i de curvatura de l'Univers. Les dependències exactes es dedueixen a l'apartat 3.3.3.

La dependència logarítmica entre lluminositat i magnitud permet convertir l'expressió 2.7 en una d'equivalent però depenent de les magnituds,

$$m^{cal}(z, H_0, \Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0) = M + 5\log_{10}\left[d_L(z, H_0, \Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0)\right] + 25\,, \tag{2.8}$$

on $H_0$ és la constant de Hubble, $\Omega_M^0$ i $\Omega_\Lambda^0$ són els paràmetres cosmològics, i $m^{cal}$ és la magnitud aparent calibrada de manera que totes les SNe Ia tinguin la mateixa magnitud absoluta:

$$m^{cal} = m^{eff} + f(\theta)\,. \tag{2.9}$$

Amb la calibració que s'utilitzarà en aquest treball, la de l'*stretch factor*, $f(\theta) = \alpha(s-1)$.

Com que un cop feta la calibració es coneix la magnitud absoluta $M$, i de l'observació es pot determinar tant la magnitud aparent $m$ com el *redshift* $z$ al que es troba la SNe Ia, la relació 2.8 permet ajustar els valors dels paràmetres cosmològics essencials per a conèixer la dinàmica de l'Univers. Per fer-ho però, és pràctic definir unes constants de manera que englobin tot el que no es vol determinar. Així, es defineix una distància lluminositat independent de la constant de Hubble,

$$D_L(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda) = H_0\, d_L(z, H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda)\,, \tag{2.10}$$

i una magnitud de punt zero,

$$\mathcal{M} = M - 5\log_{10} H_0 + 25\,. \tag{2.11}$$

La relació teòrica magnitud-*redshift* que s'utilitzarà en el capítol 6 serà doncs,

$$m = \mathcal{M} + 5\log_{10} D_L(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda)\,. \tag{2.12}$$

# Capítol 3

# Constant cosmològica i dinàmica de l'Univers

En el capítol anterior s'ha acceptat d'entrada l'existència de la constant cosmològica, però cal tenir en compte que això no ha estat sempre així, i fins que les observacions no han imposat la necessitat d'un terme amb les seves característiques no s'ha tornat a prendre seriosament. A continuació es mostrarà l'origen d'aquesta constant cosmològica i es deduiran les equacions que descriuen la dinàmica de l'Univers quan aquesta té una evolució al llarg del temps.

## 3.1 Equacions de camp d'Einstein

Una manera d'arribar a la formulació de les equacions de camp d'Einstein és mitjançant una generalització de la llei de Newton [37, 38]:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G_N \rho \qquad \Longrightarrow \qquad G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}. \tag{3.1}$$

Per tal de ser coherents amb una descripció relativista, però, les fonts del camp gravitatori no seran densitats d'energia $\rho$, sinó el tensor d'energia-moment $T^{\mu\nu}$. D'aquesta manera no es privilegia cap sistema de referència on $\rho$ estigui en repòs. Per altra banda, el fet que aquest sigui un tensor d'ordre 2 simètric, obliga a què la geometria de l'espai-temps, el costat esquerre de les equacions, també ho sigui. El tensor més senzill que compleix això i que és com a màxim d'ordre 2 en la mètrica és:

$$R_{\mu\nu} + C g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu}\,, \tag{3.2}$$

on $C$ i $\lambda$ són dues constants, $R_{\mu\nu}$ és el tensor de Ricci i $R$ l'escalar de curvatura.

$C$ es determina en imposar la conservació del tensor d'energia moment, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, ja que aquesta mateixa condició l'haurà de complir el *tensor d'Einstein,* $G_{\mu\nu}$. Així s'obté $C = -1/2$. $\Lambda \equiv \lambda/8\pi G_N$ és la constant cosmològica (d'ara en endavant $CC$). A les equacions originals d'Albert Einstein, es demanava que un univers pla indiqués l'absència de fonts, i això implicava una CC nul·la. Tot i que el terme va reaparèixer per aconseguir que les equacions descrivissin un univers estàtic, va ser ràpidament abandonat quan les observacions van començar a indicar que l'univers visible estava en expansió. La seva presència a les equacions, però, està tan justificada com la dels altres dos termes. Finalment, només queda determinar la constant de proporcionalitat entre la geometria i l'energia, $\alpha$, cosa que es fa en el límit de camp dèbil de les equacions d'Einstein i en comparació amb la llei de Newton. D'aquesta manera les 16 equacions de camp s'escriuen com:

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu} \,. \tag{3.3}$$

## 3.2 Energia quàntica del buit

El model estàndard de partícules elementals en què es produeix un trencament espontani de simetria, funciona extremadament bé per donar massa a les partícules, però crea problemes en l'àmbit de la cosmologia. Això és degut a què el fet que es produeixi un trencament de simetria crearà una energia del buit d'un valor enorme.

Si el causant del trencament de la simetria és el camp de Higgs $\phi$ que genera un potencial:

$$V_H = -\frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{8} \phi^4 \,, \tag{3.4}$$

el valor esperat en el buit serà diferent de zero,

$$< \phi >= \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, m_\phi \qquad \Longrightarrow \qquad < V_H >= -\frac{m_\phi^4}{2\lambda} \sim 10^8 \, GeV^4 \,. \tag{3.5}$$

El valor esperat en el buit del tensor d'energia-moment d'un camp escalar és proporcional a $< V_\phi >$,

$$< T_{\mu\nu} >= g_{\mu\nu} < V_\phi > \,, \tag{3.6}$$

així, si calculem les equacions d'Einstein en el buit, l'únic camp del model estàndard que contribuirà a $T^{\mu\nu}$ serà el Higgs perquè tots els altres tenen valor esperat nul, i la geometria de l'Univers només es veurà afectada pel Higgs i, en cas de considerar-la, per la CC original de les equacions d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G_N \; ( \, g_{\mu\nu} < V_H > + \, g_{\mu\nu} \, \Lambda_{buit} \, ) \; . \tag{3.7}$$

Això defineix una CC efectiva suma de la induïda pel Higgs i de l'original:

$$\Lambda_{efec} \equiv < V_H > + \Lambda_{buit} = \Lambda_{ind} + \Lambda_{buit} \, . \tag{3.8}$$

Fora del buit, les equacions de camp d'Einstein es reescriuen llavors, en funció d'aquesta $\Lambda_{efec}$ que és l'única detectable observacionalment.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G_N \; ( \, T_{\mu\nu} + \; g_{\mu\nu} \, \Lambda_{efec} \, ) \tag{3.9}$$

Precisament quan tenim en compte les observacions, surt a la llum un dels principals problemes cosmològics actuals, ja que la CC observada és de l'ordre de $\Lambda_{efec} \sim 10^{-47} \, GeV^4$ mentre que hem vist (Eq. 3.5) que segons el model estàndard de partícules, $\Lambda_{ind} \sim 10^8 \, GeV^4$. Per tal que teoria i observacions coincideixin cal doncs demanar que $\Lambda_{buit}$ sigui no nul·la i a més, que s'ajusti amb una precisió de $10^{55}$ ordres de magnitud!

Com a últim punt notar que a l'apartat anterior la CC era una constant relacionada amb la geometria de l'espai-temps, i ara apareix com una energia. L'única diferència aparent és un canvi en el costat on apareix a les equacions d'Einstein, però això en canvia la interpretació que, de totes maneres, no queda clara després de tots els problemes que genera.

## 3.3 Resolució de les equacions d'Einstein

Les equacions de camp 3.9 relacionen la geometria amb l'energia de l'Univers, però les dues coses han de ser determinades a la vegada per a un sistema triat. A nosaltres ens interessa la dinàmica de l'Univers, i per això caldrà buscar simetries del sistema que ajudin a resoldre les equacions. El mètode és estàndard, i aquí només es donaran les indicacions generals (veure [37, 39, 40] per més detalls).

### 3.3.1 Mètrica de Robertson-Walker

En principi l'Univers no té perquè tenir cap simetria en particular, però les observacions semblen indicar que a gran escala l'univers visible és isòtrop. Si a això s'afegeix la idea copernicana de què no ocupem cap lloc privilegiat a l'Univers, arribem al que es coneix com a *principi cosmològic*: "L'Univers a gran escala és homogeni i isòtrop".

El principi cosmològic imposa unes simetries sobre la forma genèrica de la mètrica de l'espai-temps 3.10, que permeten la definició d'un temps còsmic i la factorització d'un *factor d'escala*, $a(t)$, que engloba tota l'evolució de la part espacial en el temps còsmic.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu \tag{3.10}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right] \tag{3.11}$$

D'aquesta manera la mètrica que descriu l'espai-temps ve donada per 3.11, on $r, \theta$ i $\varphi$ són les coordenades esfèriques i la curvatura espacial és $k = -1, 0, +1$ per un univers obert, pla o tancat respectivament. Tota l'evolució queda determinada per $a(t)$, i aquest es determinarà mitjançant les equacions de Friedmann.

### Distància lluminositat

Un cop definit l'element mètric podem calcular distàncies a l'espai-temps. La distància radial que recorre un raig de llum entre dos esdeveniments és la *distància pròpia*:

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1-kr^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi = \int_{t_e}^{t_o} \frac{c\, dt}{a(t)}, \tag{3.12}$$

on $e$ indica emissor, $o$ observador i s'ha definit la coordenada radial física $\chi$ en funció de la radial mètrica $r$ com:

$$r(\chi) = \mathrm{sinn}\chi \equiv \begin{cases} \sin\chi & \text{per} \quad k=+1 \\ \chi & \text{per} \quad k=0 \\ \sinh\chi & \text{per} \quad k=-1 \end{cases} . \tag{3.13}$$

Aquesta distància "teòrica" no és útil a la pràctica ja que no és mesurable. En aquest treball s'utilitzarà la lluminostitat de les SNe Ia com a indicador de distància, i per tant, el que serà pràctic és una distància que es defineixi en funció del flux que es mesura. Així la *distància lluminositat* es defineix com una generalització de la distància a l'espai euclidi que relaciona el flux $\mathcal{F}$ amb la lluminositat $\mathcal{L}$ (veure secció 2.2.3):

$$\mathcal{F}_o = \frac{\mathcal{L}_o}{S} = \frac{\mathcal{L}_e}{4\pi a_0^2 r_e^2 (1+z)^2} \equiv \frac{\mathcal{L}_e}{4\pi d_L^2}, \tag{3.14}$$

$$\Longrightarrow \quad d_L = a_0 r_e (1+z) = c\,(1+z)\, a_0 \,\mathrm{sinn} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} . \tag{3.15}$$

on al igual que a l'equació 3.12 $e$ indica emissor, $o$ observador i $a_0$ representa el factor d'escala a l'actualitat.

Ara per connectar la distància lluminositat amb les observacions cal relacionar la distància pròpia amb el *redshift*, i per a això es necessita conèixer com evoluciona $a(t)$.

### 3.3.2 Equacions de Friedmann

Amb la forma de la mètrica que s'obté d'imposar el principi cosmològic es poden resoldre les equacions d'Einstein 3.9 en funció de les components del tensor d'energia-moment per acabar obtenint la dinàmica de l'Univers.

Ni l'estructura de les equacions d'Einstein ni el principi cosmològic impedeixen que la CC tingui una dependència en el temps. Com que les equacions del grup de renormalització generaran d'una manera natural aquesta dependència (veure secció 4.2), es resoldran les equacions suposant aquesta funcionalitat. Les equacions de Friedmann habituals es recuperen imposant una CC constant al resultat.

Comencem per considerar la forma que pren el tensor d'energia-moment:

$$\widetilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda(t)\, g_{\mu\nu}\,. \tag{3.16}$$

El terme $T_{\mu\nu}$ és l'associat a la matèria i a la radiació, i es veu modificat per una font addicional d'energia: la CC. Si considerem la forma genèrica del tensor per a un fluid perfecte de quadrivelocitat $U^\nu$,

$$T_{\mu\nu} = -p\, g_{\mu\nu} + (\rho + p) U_\mu U_\nu\,, \tag{3.17}$$

veiem que $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ segueix sent de la mateixa forma quan la pressió i la densitat es veuen modificades per la CC:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} &= \rho + \Lambda\,, \\ \widetilde{p} &= p - \Lambda\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Això defineix la forma de l'equació d'estat de la CC com a $p = -\rho$, i per tant, el paràmetre $w$ definit per a una equació d'estat genèrica com $p(z) = w(z)\rho(z)$ pren el valor constant $w_\Lambda = -1$ independentment de què $\Lambda$ evolucioni o no amb el temps.

La primera conseqüència obtinguda de la forma 3.16 del tensor d'energia-moment és una nova llei de conservació:

$$\nabla^\mu \widetilde{T}_{\mu\nu} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\Lambda} + \dot{\rho} + 3\, H\, (\rho + p) = 0\,. \tag{3.19}$$

$H$ és el paràmetre de Hubble definit per $H \equiv \dot{a}/a$, les derivades estan calculades respecte al temps còsmic, i $p$ i $\rho$ són la pressió i la densitat de matèria i radiació, respectivament. Considerar una evolució de $\Lambda$ amb el temps implica doncs, una transferència d'energia entre matèria i CC que no es produeix en cas de tenir una CC realment constant.

Els components temporals, $(\mu, \nu) = (0, 0)$, de les equacions d'Einstein condueixen a una segona equació per descriure la dinàmica de l'univers, l'equació de Friedmann,

$$H^2(z) = \frac{8\,\pi\,G}{3}\,[\rho(z) + \Lambda(z)] - k(1+z)^2\,, \tag{3.20}$$

mentre que les components espacials porten a una nova equació que no és independent de 3.19 i 3.20. Per a poder resoldre aquest sistema, però, encara falta una tercera equació, l'equació d'estat per cada component d'energia. En el cas especial en què la CC depèn del temps, és necessària també l'equació que dicti l'evolució. Com que aquesta depèn d'una sèrie de supòsits previs no la introduirem fins al capítol 4.

### 3.3.3 Paràmetres cosmològics

Tota la física que ens interessa està continguda a les expressions deduïdes fins ara, però habitualment es defineixen una sèrie de paràmetres per a facilitar la forma de les equacions. L'equació de Friedmann 3.20 obtinguda a l'apartat anterior permet definir la densitat crítica actual, $\rho_0^c$, com la que correspon a un univers pla[1]:

$$\rho_0^c \equiv \frac{3\,H_0^2}{8\,\pi\,G_N} = \left(3{,}0\,\sqrt{h_0} \times 10^{-3}\,eV\right)^4\,. \tag{3.21}$$

Tot i que aquesta densitat crítica es pot definir a qualsevol instant de temps, és el seu valor actual el que s'utilitza en la definició dels paràmetres cosmològics. Aquests representen la fracció de cada un dels components d'energia de l'Univers en unitats d'aquesta densitat crítica,

$$\Omega_M^0 \equiv \frac{\rho_M^0}{\rho_0^c}\,, \quad \Omega_\Lambda^0 \equiv \frac{\Lambda}{\rho_0^c}\,, \quad \Omega_K^0 \equiv \frac{-k}{a^2\,H_0^2}\,, \tag{3.22}$$

i en general, a qualsevol component $X$ d'energia se li pot assignar el corresponent paràmetre cosmològic $\Omega_X^0 \equiv \rho_X^0/\rho_0^c$.

Amb això el paràmetre de Hubble es pot reescriure d'una manera més adequada per fer càlculs com,

$$H^2(z) = H_0^2\left[\Omega_M^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda(z) + \Omega_K^0\,(1+z)^2\right]\,, \tag{3.23}$$

[1] A diferència del que passa en un univers sense CC, aquí la $\rho^c$ no implica una expansió marginal.

o en cas d'una energia fosca diferent a la CC, que en general podrà ser variable amb el temps, com:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_X^0 \exp\left( 3 \int_0^z dz' \frac{1+w(z')}{1+z'} \right) + \Omega_K^0 \, (1+z)^2 \right] . \quad (3.24)$$

Tenint en compte que el paràmetre de Hubble no és res més que la primera derivada del factor d'escala, aquesta funcionalitat en els paràmetres cosmològics es propaga a la distància pròpia, i conseqüentment, s'obté una expressió per a la distància lluminositat únicament depenent del *redshift* i dels paràmetres cosmològics:

$$\begin{aligned} d_L(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda) &= c\,(1+z)\, a_0 \,\mathrm{sinn} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \\ &= \frac{c\,(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_K|}} \,\mathrm{sinn} \left( \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{H_0\, dz'}{H(z', \Omega_M, \Omega_\Lambda)} \right) . \end{aligned} \quad (3.25)$$

També és útil la relació que s'obté de l'equació 3.23 a l'instant actual $z = 0$, la *regla de la suma cosmològica*, ja que dóna un lligam entre els diferents paràmetres cosmològics:

$$1 = \Omega_M^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_K^0 \, . \quad (3.26)$$

Per a CC que evolucionen amb el *redshift* l'expressió concreta del paràmetre de Hubble i de la regla de la suma cosmològica en funció del *redshift* es mostren al capítol 5.

# Capítol 4

# Models amb *running* de la constant cosmològica

En aquest capítol es realitzarà en una primera part un breu resum amb definicions dels conceptes de Teoria Quàntica de Camps que seran necessaris per a entendre el principal model cosmològic tractat en aquest treball. Per altra banda, en la segona part s'introduiran els diferents escenaris possibles en funció de la interpretació feta de l'equació del grup de renormalització de la constant cosmològica.

## 4.1 Conceptes de la Teoria Quàntica de Camps

### 4.1.1 Acció

Qualsevol teoria de camps, i en particular una teoria quàntica de camps (d'ara en endavant $TQC$), es caracteritza pel lagrangià de la teoria i, conseqüentment, per l'acció $S$ (es pot veure una introducció general a [41]).

Per a les aplicacions cosmològiques ens interessarà una TQC que incorpori la gravetat. No existeix pel moment una teoria quàntica de la gravitació completa, però es pot partir d'una aproximació semiclàssica que situi els camps de la teoria en un espai-temps corbat. El camp gravitatori es tracta llavors com una pertorbació sobre un fons pla ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$), però no es quantitza.

El lagrangià haurà de tenir en compte tant els termes corresponents als diferents camps com els de buit. Als termes que apareixen degut a la col·lecció de camps del model estàndard en un espai-temps pla cal afegir un terme no minimal d'interacció amb el camp gravitatori per tal d'assegurar la renormalitzabilitat (secció 4.1.2). Pel que fa al buit, que és el que interessa principalment en el nostre cas, el primer terme és el de Hilbert-Einstein (HE) amb CC:

$$S_{HE} = -\int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{16\pi G_{buit}}\,R + \Lambda_{buit}\right)\,, \tag{4.1}$$

mentre que la renormalitzabilitat de la teoria (veure secció 4.1.2) obliga a afegir una sèrie de termes locals depenents de la curvatura amb ordres més alts de derivades de la mètrica [42]:

$$S_{buit} = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(a_1 R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + a_2 R^2_{\mu\nu} + a_3 R^2 + a_4 \Box R - \frac{1}{16\pi G_{buit}}\,R - \Lambda_{buit}\right)\,. \tag{4.2}$$

Cal destacar que la mateixa $\Lambda_{buit}$ és necessària per a la renormalitzabilitat de la teoria i, per tant, teories sense CC no són renormalitzables. Pel que fa a la resta de termes de 4.2 els primers són només importants a altes energies (poden ser els causants de la inflació, per exemple) ja que són proporcionals a derivades n-èssimes de la mètrica o a productes entre elles. És per això que per tractar la constant cosmològica en tindrem prou en considerar l'acció de HE: a baixes energies, és a dir, a l'època actual, tots aquests termes de derivades n-èssimes no contribueixen.

### 4.1.2 Regularització i renormalització

En moltes ocasions les integrals que apareixen en una TQC presenten divergències en considerar moments alts (divergències ultraviolades), i això és el que succeeix amb la teoria descrita en part per l'acció 4.2. Per tal de poder seguir tractant aquestes teories tot i les divergències, s'utilitzen els mètodes de regularització i renormalització (veure per exemple [43]). La idea principal es basa en absorbir les divergències en els termes que representin magnituds no observables dintre el lagrangià, de manera que tots els observables es mantinguin finits.

Com a primer pas es modifiquen les integrals originals introduint un paràmetre de regularització que les converteix en integrals finites. Això es pot fer

*(i)* tallant la integral a un determinat moment (*cut-off*),

*(ii)* canviant la dimensió de l'espai amb la corresponent incorporació d'una constant dimensional que manté la dimensió original de la integral, o

*(iii)* discretitzant l'espai-temps i considerant un volum finit.

Tot i la diversitat dels mètodes de regularització, en tots ells el paràmetre introduït s'acaba fent tendir a una certa constant i la integral pren llavors un valor finit. D'aquesta manera, en teories renormalitzables, tots els mètodes són equivalents.

Un cop feta la regularització, cal expressar els paràmetres del lagrangià (les masses

$m$ i les constants d'acoblament $\lambda$) en funció del paràmetre de regularització $\Lambda$[1]. Si d'aquesta manera, o bé afegint a més altres termes per absorbir noves divergències (*counterterms*), es fan finites totes les funcions de Green es diu que la teoria és *renormalitzable*.

Es pot veure que la regularització trenca la invariància d'escala, però si la teoria tenia invariàncies de *gauge* locals o globals, aquestes s'han de conservar. Això s'aconsegueix afegint termes locals al lagrangià que facin que en el conjunt del lagrangià la simetria es conservi.

Tal i com passava amb la regularització hi ha diferents esquemes de renormalització, tots ells amb la funció d'absorbir les divergències substituint els valors de les masses i les constants d'acoblament originals del lagrangià (anomenats valors nus $m_0$ i $\lambda_0$) pels valors físics obtinguts en funció del paràmetre de regularització. Cal llavors especificar les *condicions de renormalització* que defineixen les funcions de Green en un cert punt arbitrari, l'escala de renormalització $\mu$. Imposar aquestes condicions estableix la relació entre els paràmetres nus i els renormalitzats.

$$\begin{aligned} m &= m(m_0, \lambda_0, \Lambda, \mu) \\ \lambda &= \lambda(m_0, \lambda_0, \Lambda, \mu) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Per tal d'acabar de veure els efectes de la TQC sobre la constant cosmològica ens basarem

*(i)* en l'esquema de renormalització de substracció mínima modificada ($\overline{\mathrm{MS}}$). Aquest elimina el pol a $1/(4-d)$ que ha aparegut en la regularització juntament amb altres termes constants afegint una massa arbitrària $M$ per a conservar les dimensions de l'equació, i

*(ii)* en l'esquema de substracció de moment. Aquest esquema considera l'escala de renormalització com el moment euclidi i porta a uns resultats més físics que depenen de la massa.

### 4.1.3 Equacions del grup de renormalització

Acabem de veure que una TQC renormalitzada no és, en general, invariant d'escala. Aquesta dependència de la TQC amb l'escala la descriuen les *equacions del grup de renormalització* (d'ara en endavant *EGR*).

Un cop la teoria ha estat renormalitzada, les masses ($m$) i les constants d'aco-

[1]Tot i que $\lambda$ i $\Lambda$ no són els símbols més adequats per a designar aquests paràmetres quan el que es vol estudiar és la constant cosmològica $\Lambda$, ho fem així per tal de mantenir la notació habitual de la bibliografia.

blament ($\lambda$) són funcions de l'escala de renormalització $\mu$, ja que tot i que els seus valors nus estiguin fixats un canvi en l'escala de renormalització fa variar els valors renormalitzats:

$$\begin{aligned} \mu \longrightarrow \mu + \delta\mu \qquad \Longrightarrow \qquad & m \longrightarrow m + \delta m \\ & \lambda \longrightarrow \lambda + \delta\lambda\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Les funcions de Green nues, en canvi, són independents de $\mu$. Com que la renormalització reescala els camps segons $\phi = Z^{-1/2}\phi_0$, el pas de la funció de Green nua a la renormalizada vindrà simplement donada per aquest escalat, i l'equació diferencial que implica la conservació de $G_0$ sota canvis de $\mu$ es converteix en una equació diferencial per $G_R$ a ordre $n$:

$$\mu\frac{d}{d\mu}G_0^{(n)}(p_i; m_0, \lambda_0, \Lambda) \;=\; 0 \tag{4.5}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\frac{d}{d\mu}Z_\phi^{-n/2}G_R^{(n)}(p_i; m_0, \lambda_0, \Lambda) \;=\; 0\,. \tag{4.6}$$

La dependència específica de $\lambda$, $m$ i $Z_\phi$ amb l'escala $\mu$ dóna peu a tres funcions: la funció beta ($\beta$), la dimensió anòmala de massa ($\gamma_m$) i la dimensió anòmala del camp $\phi$ ($\gamma_\phi$):

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &\equiv \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\,, \\ \gamma_m(\lambda) &\equiv \frac{1}{m}\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\,, \\ \gamma_\phi(\lambda) &\equiv -\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial\mu}\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Si utilitzem ara aquestes tres funcions per a reescriure l'equació 4.6 obtenim les equacions del grup de renormalització:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} + n\gamma_\phi\right] G_R^{(n)}(p_i; m_0, \lambda_0, \Lambda) = 0\,. \tag{4.8}$$

Com que $G_R$ és una funció renormalitzada no depèn del paràmetre de regularització $\Lambda$. Com a conseqüència tampoc ho fan $\beta$, $\gamma_m$ i $\gamma_\phi$. A més, per la forma de 4.8 aquestes funcions han de ser adimensionals i, per tant, si tenen alguna dependència amb l'escala de renormalització aquesta serà de la forma

$$\beta(\lambda, \mu/m)\,, \quad \gamma_m(\lambda, \mu/m)\,, \quad \gamma_\phi(\lambda, \mu/m)\,.$$

Tot i que totes tres funcions depenen de les constants d'acoblament renormalitzades, és la funció $\beta$ la que dóna la seva variació amb l'escala de renormalització. Matemàticament aquesta funció pot tenir tres comportaments diferenciats quan es consideren acoblaments petits i per tant el desenvolupament a primer ordre és vàlid:

*(i)* $\beta(\lambda) > 0$. En aquest cas la constant d'acoblament $\lambda$ va cap a zero a l'infraroig, cosa que permet fer prediccions de la teoria a baixes energies. Cap a l'ultraviolat, per contra, $\lambda$ divergeix.

*(ii)* $\beta(\lambda) = 0$. Ara $\lambda$ no experimenta cap evolució coincidint així amb el valor nu $\lambda_0$.

*(iii)* $\beta(\lambda) < 0$. El comportament és el contrari que en el cas *(i)* i s'anomenen *assimptòticament lliures* perquè no hi ha interacció a altes energies.

Si es consideren en canvi acoblaments forts cal considerar ordres alts de $\beta(\lambda)$ i això pot fer que apareguin màxims i mínims a $\beta(\lambda)$. En aquests casos, es troben punts fixes $\lambda_*$ tals que $\beta(\lambda_*) = 0$. Així si a altes energies $\lambda$ tendeix cap a $\lambda_*$ diem que aquest és un *punt fix estable ultraviolat*. Si ho fa a baixes energies és un *punt fix estable infraroig*.

## 4.2 Equacions del grup de renormalització per a la constant cosmològica

Els resultats comentats a la secció 4.1 són ben coneguts en un espai pla, però quan es treballa en un espai-temps corbat apareixen alguns problemes.

Les bases són clares : a partir de l'acció en un espai-temps pla es canvien les derivades parcials per les covariants, la mètrica de Minkowski per una genèrica i es passa de $d^4x$ a $d^4x\sqrt{-g}$. Amb aquestes transformacions sobre els camps del model estàndard de partícules, la inclusió de l'acció de HE i dels termes necessaris per la renormalització s'arriba a una acció 4.2 per al buit.

La CC que apareix a 4.1 no és més que un paràmetre nu que en renormalitzar la teoria absorbeix també part de les divergències.

Si s'utilitza la regularització dimensional i l'esquema de renormalització $\overline{\mathrm{MS}}$ es pot escriure l'equació del grup de renormalització de la CC com:

$$\mu \frac{d}{d\mu}\left(\frac{\Lambda}{8\pi G}\right) = \beta_\Lambda(\overline{MS}) = \frac{m^4}{2(4\pi)^2}\,. \tag{4.9}$$

De la mateixa manera, la constant de Newton $G$ també és un paràmetre que ha estat renormalitzat i que segueix la seva pròpia EGR:

$$\mu \frac{d}{d\mu}\left(-\frac{1}{16\pi G}\right) = \beta_G(\overline{MS}) = \frac{m^2}{(4\pi)^2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right), \tag{4.10}$$

on $\xi$ és el paràmetre introduït en la part de l'acció no minimal.

Ja en un espai-temps pla, l'escala de renormalització $\mu$ no té una interpretació clara dintre de l'esquema $\overline{\text{MS}}$ perquè és únicament un paràmetre auxiliar en la regularització dimensional. A més, la funció $\beta$ acostuma a fallar a baixes energies. Els esquemes depenents de la massa sí que donen una interpretació per $\mu$, i en el límit d'altes energies les funcions $\beta$ aconseguides pels dos esquemes han de coincidir. Aquesta comparació a altes energies és una manera de donar una interpretació a $\mu$ en l'esquema $\overline{\text{MS}}$. Tot i que l'esquema $\overline{\text{MS}}$ dóna resultats més fàcils presenta un altre inconvenient, no s'observa el desacoblament dels graus de llibertat massius (Teorema d'Appelquist-Carazzone [44]).

Amb aquestes característiques sembla indispensable calcular les EGR en un esquema depenent de la massa, però malauradament fins ara els càlculs en un espai-temps corbat es realitzen pertorbativament sobre la mètrica d'un espai-temps pla i, per tant, el resultat no és universal: els efectes no pertorbatius no es poden observar.

De fet, a [45] s'han calculat aquestes EGR per $\Lambda$ i $G$ en un esquema depenent de la massa, i s'han trobat unes funcions $\beta$ nul·les. El resultat però, s'interpreta com un problema en el mètode de càlcul perquè en el límit ultraviolat aquest resultat hauria de coincidir amb l'obtingut en l'esquema $\overline{\text{MS}}$ i això no succeix.

És per aquesta raó que habitualment es considera correcta a altes energies l'EGR trobada amb l'esquema $\overline{\text{MS}}$ i es fan llavors diverses hipòtesis sobre quina és l'escala de renormalització i el grau d'aplicació del teorema d'Appelquist-Carazzone. Abans de fer aquestes hipòtesis podem intentar donar una forma més general a l'equació 4.9.

Considerem doncs la funció beta 4.9. Aquesta, deduïda mitjançant l'esquema $\overline{\text{MS}}$, hauria de donar el comportament correcte a altes energies. A baixes energies, però, la funció $\beta$ dependrà de la massa i caldria veure si els graus de llibertat massius són o no importants. Hem vist que no ho podem calcular amb un esquema de renormalització depenent de la massa, però podem mirar quina forma genèrica pot pendre. Aquests tipus d'esquemes introdueixen termes del tipus $\mu/M$, com succeeix per exemple amb els mateixos termes $a_i$ de l'acció del buit 4.2 tal i com es mostra a [45]. És doncs lícit esperar un desacoblament del mateix estil a la CC de manera que a la seva funció $\beta$ s'esperaran termes $\mu^2 M^2$ i potències d'aquest:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{d\ln\mu} &= \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\sum_i A_i\, m_i^4 + \mu^2 \sum_j B_j M_j^2 \;+ \mu^4 \sum_j C_j + \mu^6 \sum_j \frac{D_j}{M_j^2} \;+ ...\right) \\
&\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i \alpha_{in}\, \mathcal{M}_i^4 \left(\frac{\mu}{\mathcal{M}_i}\right)^{2n} \equiv \beta_\Lambda(\mathcal{M}_i, \mu/\mathcal{M}_i).
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

on $m_i$ són els graus de llibertat lleugers amb $\mu > m_i$, $M_j$ són els pesats amb $\mu < M_j$ i $i$ i $j$ representen els camps massius. $A, B, C$ i $D$ són termes constants mentre que l'índex $n$ és l'ordre del desenvolupament.

A partir de la comparació d'aquesta equació a l'ultraviolat amb l'obtinguda a l'esquema MS es pot obtenir la forma explícita per la constant $A_i$ corresponent a partícules de massa $m_i$ i spin $J_i$,

$$A_i = (-1)^{2J_i}(J_i + 1/2)\, n_{J_i}\, N_c\,, \tag{4.12}$$

amb $n_{\{0,1,1/2\}} = (1, 1, 2)$ i $N_c = 1, 3$ per partícules sense i amb color respectivament.

L'expressió 4.11 no presenta potències senars de $\mu$, perquè en els càlculs $\mu$ apareix bilinealment en les contraccions amb el tensor mètric. La covariança, per exemple prohibeix el terme proporcional a $\mu$, i el desenvolupament comença així amb $\mu^2$. El desacoblament dels camps massius es realitza segons el teorema d'Appelquist-Carazzone i, per tant, la supressió actua amb potències inverses d'aquests camps. La forma de la CC, però, és diferent a qualsevol altre paràmetre del model estàndard de partícules degut a la seva dimensió (energia)$^4$. D'aquesta manera els ordres $n = 1$ i $n = 2$ no segueixen la forma habitual perquè la pròpia funció $\beta$ té una forma particular proporcional a $M^4$. Els termes d'ordre igual o superior al tercer ja queden suprimits de la manera usual, però el fet que l'ordre $n = 2$ ho faci diferent dota a la CC d'un desacoblament suau característic.

Aquesta equació, però, encara no té un significat concret perquè l'escala de renormalitació $\mu$ no ha estat completament especificada en el marc cosmològic tot i la seva interpretació com a escala d'energia. De les diferents opcions i altres detalls s'acaben deduint diferents escenaris cosmològics.

## 4.3 Escenaris cosmològics

Considerar les EGR per a la constant cosmològica i la de Newton en les equacions d'Einstein ha donat peu a diferents models cosmològics variants de l'estàndard FLRW. La major part d'ells són conseqüència de la teoria mostrada fins ara, tot i que també s'han obtingut resultats tractant una gravetat quàntica de forma no pertorbativa. Per completitud introduirem en aquesta secció també un petit apartat corresponent a aquest últim cas.

### 4.3.1 Solució pertorbativa a les EGR

Abans de veure els diferents escenaris cosmològics en aquest cas mirem quines seran les EGR necessàries.

Des del primer moment hem descartat els termes $a_i$ de la part corresponent al buit de l'acció per a l'estudi de l'Univers actual, és a dir, a baixes energies. A més, a [46] es demostra que l'evolució de $G$ és negligible dintre d'aquest marc pertorbatiu, perquè $1/G \sim M_{Pl}^2$ és molt gran i comparativament el *running* no s'observa. La situació és la contraria que per la CC i no caldrà per tant, utilitzar la seva EGR. Finalment, pel que fa al terme induït de la CC ($\Lambda_{ind}$) la seva EGR és completament independent de la de $\Lambda_{buit}$, però s'espera que el desacoblament es produexi de la mateixa manera i, per tant, es pot utilitzar la mateixa forma per al total de la CC física ($\Lambda_{fis} \equiv \Lambda$) tal i com es demostra també a [46].

Un cop vist que per a les possibles implicacions cosmològiques només ens caldrà determinar la forma de $\beta_{\Lambda_{fis}}$, veiem els escenaris que s'han considerat fins al moment entre els quals s'inclou el principal objectiu del treball.

**Escenari 1:** $m_i < \mu$**,** $\mu \sim \rho_c^{1/4}(t)$

A [47] es considera que els únics contribuents a $\beta_\Lambda$ són els graus de llibertat lleugers. D'aquesta manera l'equació 4.11 manté únicament el primer terme proporcional a $A_i$. Però per saber quins són aquests graus de llibertat lleugers falta encara definir l'escala de renormalització $\mu$. Si es considera $\mu$ com l'escala típica d'energia de l'Univers podem considerar-la com l'energia crítica a cada instant de temps:

$$\mu \sim \rho_c^{1/4}(t)\,. \tag{4.13}$$

Actualment $\rho_c^0 \sim (3\sqrt{h_0}\cdot 10^{-3}\,eV)^4$, llavors la condició de renormalització s'especificarà a $\mu_c = (\rho_c^0)^{1/4} \sim 10^{-3}\,eV$. Amb aquesta escala d'energia i considerant el model estàndard de partícules, els únics graus de llibertat actius són ara els neutrins més lleugers i, per tant, la funció $\beta_\Lambda$ mostrada a l'equació 4.11 es pot reescriure com:

$$\frac{d\Lambda}{d\ln\mu} = \frac{-4}{(4\pi)^2}\sum_\nu m_\nu^4\,, \tag{4.14}$$

on el sumatori s'estén pels neutrins lleugers: l'electrònic i un possible neutrí estèril.

En aquest cas particular es pot calcular exactament l'EGR tant per a $\Lambda_{ind}$ com per a $\Lambda_{buit}$ i veure que són idèntiques. L'equació 4.14 és directament la suma d'ambdues.

La integració directa de l'equació 4.14 implica una CC creixent cap al futur. En principi semblaria que el comportament esperat hagués de ser el contrari i com a conseqüència s'apel·la en ocasions a l'existència d'un camp escalar lleuger $S$ encara desconegut, que tindria una energia similar a la dels neutrins lleugers i que contribuiria positivament a $\beta_\Lambda$:

$$\frac{d\Lambda}{d\ln\mu} = \frac{1}{2(4\pi)^2} m_S^4 - \frac{4}{(4\pi)^2} \sum_\nu m_\nu^4 \,, \tag{4.15}$$

$$\Lambda(\rho) = \Lambda_0 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{2} m_S^4 - 4 \sum_\nu m_\nu^4 \right) \ln \frac{\rho}{\rho_0} \,. \tag{4.16}$$

**Escenari 2:** $M_i > \mu$**,** $\mu \sim \rho_c^{1/4}(t)$

Els autors de [48] consideren que tot i que les partícules amb $M > \mu$ veuen en part la seva contribució suprimida, aquesta encara domina la corresponent a les partícules amb $m < \mu$. Així, són les partícules més pesants les que dominen el *running* a qualsevol escala, i el desenvolupament de 4.11 s'ha de mantenir fins a $n = 3$.

Després de definir el seu esquema de renormalització obtenen per al model estàndard de partícules la següent funció $\beta_\Lambda$ [49]:

$$\frac{d\Lambda}{d\ln\mu} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_i \sigma_i \, m_i^4 \frac{\mu^2}{\mu^2 + m_i^2} \,, \tag{4.17}$$

on la suma s'estén pels $i$ graus de llibertat massius i $\sigma_i = +1, -1$ per bosons i fermions respectivament.

Un cop integrada i fent l'aproximació de massa nul·la pels neutrins (aproximació vàlida degut a la diferència de masses amb les altres partícules del model estàndard) el *running* de la CC ve donat, fins a $n = 2$, per:

$$\Lambda(\mu) = \Lambda_0 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \mu^2 \frac{1}{4} \left( m_H^2 + 3m_Z^2 + 6m_W^2 - 4 \sum_i N_i m_i^2 \right) + \mu^4 \left( \frac{1}{2} \sum_i N_i - \frac{5}{4} \right) \right] . \tag{4.18}$$

El terme en $\mu^2$, però, portaria a una evolució enorme de la CC contraria a les observacions, i per aquesta raó cal demanar que aquest terme s'anul·li. Això imposa un valor per a la massa del Higgs en funció de la resta dels camps del model estàndard de partícules:

$$m_H^2 = 4\sum_i N_i m_i^2 - 3m_Z^2 - 6m_W^2 \sim (550\,GeV)^2\,. \tag{4.19}$$

Tot i que el valor és una mica elevat cau dintre de les cotes actuals a la seva massa. De totes maneres això no evita que es necessiti un ajustament massa fi per aconseguir una CC compatible amb les observacions. A més, la condició 4.19 equival a $\mu^2 \sum_j B_j M_j^2 = 0$ al desenvolupament obtingut segons l'esquema de 4.2. Aquests $B_j$ no són exactament els mateixos que els de l'equació 4.18 i, per tant, la massa del Higgs varia segons l'esquema utilitzat.

Tal i com passava en l'*Escenari 1*, l'escala d'energia és $\mu \sim \rho^{1/4}$.

**Escenari 3:** $M_i > \mu$, $\mu \sim R^{1/2} \sim H(t)$

La principal variació en aquest escenari és el canvi en l'escala de renormalització. Ja a [47] es va proposar:

$$\mu \sim R^{1/2} \sim (G\rho)^2 \sim H(t)\,, \tag{4.20}$$

on $R$ és l'escalar de curvatura i $H$ el paràmetre de Hubble. El valor actual d'aquest últim és $H_0 \sim 10^{-33}\,eV$. Això implica que amb les hipòtesis de l'*Escenari 1* actualment no trobaríem cap grau de llibertat actiu (recordem que la partícules amb massa més petita dintre del model estàndard són el neutrins amb $m_\nu \geq 10^{-3}\,eV$), i en aquell context la CC no experimentaria cap evolució. És per això que assumim aquí que degut al desacoblament suau que es produeix a la CC, les partícules més massives amb $M \sim M_{Pl}$ són les veritables causants del *running*. Fins i tot les masses properes a la possible escala de gran unificació ($M_{GUT} \sim 10^{16} GeV$) causarien un *running* menyspreable comparat amb el produït a l'escala de Planck. Amb aquests supòsits l'ordre $n = 0$ de l'equació 4.11 és estrictament zero, i de $n = 2$ en endavant els termes són menyspreables en front l'ordre dominant $n = 1$ [50]:

$$\frac{d\Lambda}{d\ln\mu} \sim \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_i \mu^2 B_i M_i^2\,. \tag{4.21}$$

amb $M_i \sim M_{Pl}$. Com que per $B = \mathcal{O}(1-10)$ i $M_i \sim M_{Pl}$:

$$\beta_\Lambda^0 \sim \frac{BH_0^2 M_{Pl}^2}{(4\pi)^2} \sim \frac{B\,(1{,}5\,10^{-42}\,GeV \times 1{,}2\,10^{19}\,GeV)^2}{(4\pi)^2} \sim 10^{-47}\,GeV^4 \sim \Lambda_0\,, \tag{4.22}$$

dues escales tan diferents com la de Planck i la de la constant de Hubble determinen l'ordre de magnitud correcte de la CC.

El fet que amb aquesta identificació l'escala de renormalització prengui un valor tan baix fa que l'evolució es mantingui suau durant la major part de la vida de l'Univers. La CC va creixent cap al passat i, per exemple, a l'època de Fermi

$$\Lambda_F \sim H_F^2 M_{Pl}^2 \sim \left(\frac{T_F^2}{M_{Pl}}\right)^2 M_{Pl}^2 \sim M_F^4\,, \tag{4.23}$$

mentre que a l'època de Planck s'arribaria a $\Lambda_{Pl} \sim M_{Pl}^4$. De fet, l'EGR és "només" aplicable fins a l'escala de Planck. Un cop superada, es fa necessària una teoria completa de la gravetat quàntica, i com que la mateixa mètrica deu ser altament fluctuant no té sentit parlar del paràmetre de Hubble. Així *fins* a l'època de Planck, gairebé tota la vida de l'Univers, l'evolució de la CC queda descrita per:

$$\frac{d\Lambda}{d\ln H} = \frac{1}{(4\pi)^2}\sigma\, H^2 M^2\,, \tag{4.24}$$

$$\Lambda(H) = \Lambda_0 + \frac{\sigma}{2(4\pi)^2} M^2 (H^2 - H_0^2)\,. \tag{4.25}$$

on $\sigma = +1, -1$ correspon a diferents casos on els bosons o fermions respectivament dominen a altes energies, i s'ha definit $M \equiv \sqrt{|\sum_i B_i\, M_i^2|}$.

### Comparativa

Un cop vista quina és la dependència de la CC amb l'escala d'energia podem veure gràficament quina és la magnitud de l'efecte.

A la figura 4.1 s'ha representat l'evolució de la CC tant respecte a la densitat crítica ($\rho_c$) com al *redshift* ($z$) per als tres escenaris mencionats anteriorment. Cal remarcar que les escales de renormalització són diferents, però la relació existent entre el paràmetre de Hubble i la densitat crítica (Eq. 4.26) fa que els resultats es puguin expressar en funció d'únicament una d'elles, en aquest cas $\rho_c$.

$$\rho_c(z) = \frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} H(z)^2 \tag{4.26}$$

L'*Escenari 1* és, donat un model de partícules elementals, un cas sense paràmetres lliures. El problema és que la massa dels neutrins lleugers no es coneix amb un grau acceptable de precisió. A més, hem vist que per a obtenir el comportament desitjat de la CC cal introduir un camp escalar extra que faci positiva la funció $\beta_\Lambda$. Seguint les indicacions de [47] els valors utilitzats a la representació han estat: $m_\nu \sim 0,002\, eV$ i $m_S \sim 4\, m_\nu$.

Una cosa similar passa a l'*Escenari 2* amb la diferència que aquí el model estàn-

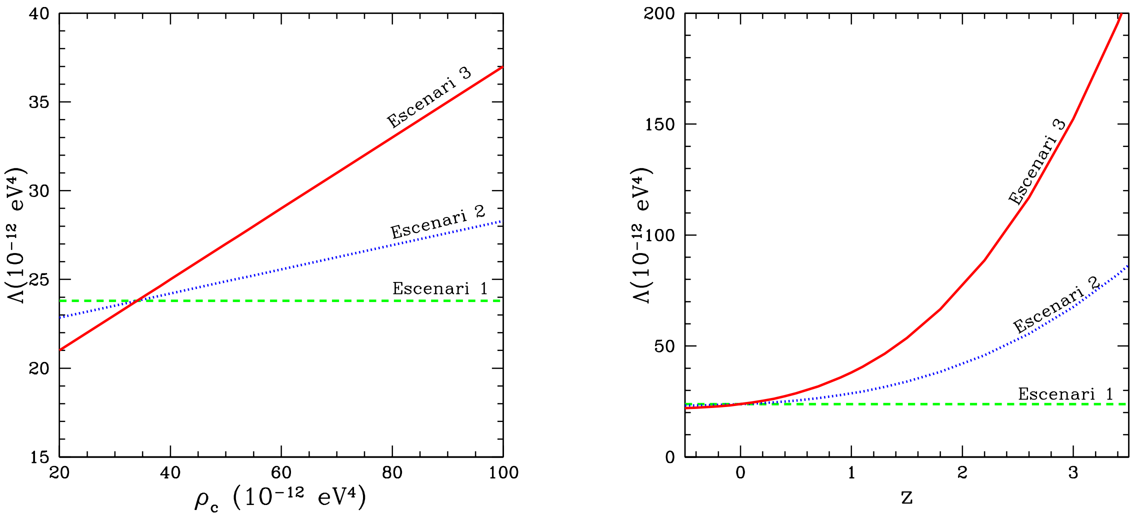


FIG. 4.1 – Evolució de la CC per efecte de les EGR segons els tres escenaris mencionats en aquesta secció. La mateixa evolució és representa en funció de la densitat crítica ($\rho_c$) i del *redshift* ($z$).

dard de partícules elementals sí que determina completament la forma de l'evolució:

$$\eta \equiv \frac{1}{2}\sum_i N_i - \frac{5}{4} = 10,75\,.$$

Per contra, a l'*Escenari 3*, el conjunt de partícules amb masses prop l'escala de Planck ens són pel moment completament desconeguts i, per tant, encara necessitem una teoria que ens aporti aquesta informació. A la figura 4.1 s'ha utilitzat un valor de $\nu = 0,1$, on el paràmetre $\nu$ es definirà al capítol 5 com un quocient d'aquestes masses respecte la de Planck (Eq. 5.4).

Tots els models mostrats prediuen valors creixents de CC cap al passat i una disminució en el futur, si bé s'ha omès l'*Escenari 1* sense camp escalar addicional i l'*Escenari 3* amb $\nu$ negatiu, tots dos amb un comportament contrari. En el primer cas (*Escenari 1*), no s'observa cap *running* a l'escala que es mostren els altres dos. Això és degut a què en ser causat per les partícules menys massives el seu efecte és molt baix, i l'evolució logarítmica en $\rho_c$ que prediu l'equació 4.16 queda amagada sis ordres de magnitud per sota de les mostrades. El pendent de l'*Escenari 2*, aquest sí apreciable, queda unívocament determinat per la seva EGR sempre i quan es produeixi l'anul·lació del terme en $\mu^2$. És el pendent de l'*Escenari 3* el que pren diferents valors en funció de l'índex $\nu$. Tot i que a la figura es mostra una evolució més acusada que per al cas anterior, aquesta pot ser molt menor, o fins i tot menyspreable si $\nu$ fos realment baix. La discussió d'aquest tercer cas es mostra en tot detall al capítol 5, tot ell dedicat a veure quines són les conseqüències d'una cosmologia dominada per partícules massives situades prop de l'escala de Planck.

De cara a capítols posteriors també s'ha representat a la figura 4.1 aquestes evolucions en funció del *redshift*, parametrització que serà molt útil quan s'apliquin les distàncies a les SNe Ia per a acabar de caracteritzar els models juntament amb els paràmetres cosmològics. Les conclusions són evidentment les mateixes.

### 4.3.2 Solució no pertorbativa a les EGR

Aquesta visió és diferent a la dels escenaris que s'han comentat fins al moment, ja que s'utilitzen les EGR exactes aplicables a la gravetat quàntica amb la suposició de l'existència d'un punt fix a l'infraroig [51, 52]. Això permet resoldre les EGR no pertorbativament sinó pel mètode del truncament (reducció de l'acció efectiva promig a l'acció de Hilbert-Einstein). D'aquesta manera els acoblaments $G$ i $\Lambda$ també adquireixen una dependència amb l'escala.

**Escenari 4:** $\mu \sim 1/t \sim H(t)$

L'existència d'un punt fix ($g_*$ i $\lambda_*$ per $G$ i $\Lambda$ respectivament) permet establir la dependència amb l'escala prop d'aquest punt:

$$\begin{aligned} G(\mu) &= g_*/\mu^2 \,, \\ \Lambda(\mu) &= \lambda_* \mu^2 \,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Per altra banda, els autors de [51] consideren que l'escala d'energia és inversament proporcional al temps còsmic,

$$\mu = \xi / t \,, \tag{4.28}$$

on $\xi$ és una constant positiva. Com que $H \propto 1/t$ en la cosmologia FLRW aquesta tria no és essencialment diferent a 4.20.

Sota aquestes hipòtesis, es resol a [52] el sistema d'equacions diferencials d'una cosmologia FLRW plana i es troba un únic atractor a $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{3}{8}(1+w)^2 g_* \lambda_* t^2 \,, \\ \Lambda(t) &= \frac{8}{3(1+w)^2} \frac{1}{t^2} \,, \end{aligned} \tag{4.29}$$

on $w$ és el paràmetre de l'equació d'estat $p(t) = w\rho(t)$ corresponent a la component dominant.

Cal destacar que a diferència dels altres casos, aquí també experimenta l'evolució la constant de Newton.

### 4.3.3 Escala de renormalització

Com hem vist en aquests quatre escenaris s'han proposat quatre escales de renormalització diferents ($\rho^{1/4}, R^{1/2}, H$ i $t^{-1}$) que es poden reduir, en el marc cosmològic, a $\rho^{1/4}$ i $H$. Ja d'entrada sembla una llibertat massa gran per al paràmetre respecte el qual es descriu l'evolució de l'Univers.

A [53] s'intenta posar remei a aquesta ambigüitat establint un procediment per determinar estrictament l'escala $\mu$. Imposar que es mantingui la covariància general a les equacions d'Einstein implica que es conservin les dues bandes de les equacions, i un cop coneguda $\Lambda(\mu)$ i $G_N(\mu)$ això relaciona $\mu$ amb la densitat de matèria $\rho_M$. D'una manera similar a la que en aquest treball permet obtenir la repercusió de les EGR sobre $\rho_M$, els autors de [53] utilitzen la relació per determinar $\mu$ en funció de $\rho_M$. La filosofia, però, és diferent: mentre que aquí no es presuposarà la validesa de l'evolució habitual de $\rho_M$ sinó que se'n deduirà la forma, a [53] cal assumir que aquesta és universal.

De totes maneres aquest mètode de determinació de $\mu$ coincideix en certs límits amb les eleccions "naturals" de l'apartat anterior. Per als escenaris corresponents a la solució pertorbativa de les EGR el valor de $\mu$ es pot aproximar a $H$ sota algunes hipòtesis, mentre que per als escenaris corresponents a una gravetat quàntica amb un punt fix a l'infraroig es recupera $\mu \propto 1/t$ només en el cas d'un Univers pla.

# Capítol 5

# Anàlisi detallat de l'*Escenari 3*

Per tal de veure com afecta la consideració de l'evolució de la constant cosmològica a la dinàmica de l'Univers cal resoldre el sistema d'equacions habitual (l'equació de continuïtat amb equació d'estat inclosa i l'equació de Friedmann, totes dues modificades convenientment) conjuntament amb l'equació del grup de renormalització per a la constant cosmològica. En aquest capítol es resoldran aquestes equacions i s'estudiarà com es comporten les diferents components d'energia en funció del paràmetre $\nu$ del model, sobre el qual s'imposaran diverses restriccions.

## 5.1 Equacions de la cosmologia

En el capítol anterior s'ha obtingut la EGR per a la constant cosmològica a *baixes* energies com a funció de l'escala d'energia, en aquest cas el paràmetre de Hubble $H$ (Eq. 4.24). La forma habitual de les equacions de continuïtat ($EC$) i de Friedmann ($EF$) dóna l'evolució en funció del temps còsmic. Per a resoldre aquestes equacions, però, serà útil la seva parametrització en funció del *redshift*, i aquesta conversió es realitza fàcilment utilitzant la regla de la cadena i combinacions entre les diferents equacions:

$$EC, \quad a = \frac{1}{1+z}, \quad \dot{a} = aH \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Lambda}{dz} + \frac{d\rho}{dz} = \frac{3\,\rho}{1+z}, \tag{5.1}$$

$$EGR \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Lambda}{dz} = \frac{d\Lambda}{d\ln H}\frac{d\ln H}{dH}\frac{dH}{dz} = \frac{(4\pi)^2}{2}\,\sigma\,M^2\,\frac{dH^2}{dz}, \tag{5.2}$$

$$EF \quad \Longrightarrow \quad \frac{dH^2}{dz} = \frac{8\,\pi\,G}{3}\left(\frac{d\Lambda}{dz} + \frac{d\rho}{dz}\right) + 2\,H_0^2\Omega_K^0(1+z). \tag{5.3}$$

Definim a continuació dos paràmetres adimensionals, dels quals únicament un és independent però que ens seran útils per analitzar el model:

$$\nu \equiv \frac{\sigma}{12\,\pi}\,\frac{M^2}{M_P^2}, \tag{5.4}$$

$$\kappa \equiv -2\,\nu\Omega_K^0. \tag{5.5}$$

Amb aquestes definicions i utilitzant 5.3 a 5.2 i el resultat a 5.1 s'obté una equació diferencial per a la densitat de matèria,

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{3(1-\nu)\,\rho(z)}{1+z} - \kappa\,\rho_c^0\,(1+z) = 0\,, \tag{5.6}$$

directament integrable amb la condició inicial que per $z = 0$ la densitat val $\rho = \rho_M^0$:

$$\rho(z;\nu) \;=\; \left(\rho_M^0 + \frac{\kappa}{1-3\nu}\,\rho_c^0\right)(1+z)^{3(1-\nu)} - \frac{\kappa}{1-3\nu}\,\rho_c^0\,(1+z)^2\,. \tag{5.7}$$

Substituint ara aquest resultat a l'equació de continuïtat 5.1 s'arriba a l'expressió anàloga per a la densitat de CC:

$$\Lambda(z;\nu) = \Lambda_0 + \rho_M^0\,f(z)\; + \rho_c^0\,g(z)\,, \tag{5.8}$$

on la condició inicial és $\Lambda(z = 0) = \Lambda_0$ i amb

$$f(z) = \frac{\nu}{1-\nu}\,\left[(1+z)^{3(1-\nu)} - 1\right]\,, \tag{5.9}$$

$$g(z) \;=\; -\frac{\kappa}{1-3\nu}\,\left\{\frac{z\,(z+2)}{2} + \frac{\nu}{1-\nu}\,\left[(1+z)^{3(1-\nu)} - 1\right]\right\}\,. \tag{5.10}$$

Tant en l'equació 5.7 com en la 5.8 els paràmetres $\nu$ i $\kappa$ juguen papers importants. Aquest últim és el que indica la curvatura espacial de l'univers: si $\nu > 0$ el signe de $\kappa$ coincideix amb el de la curvatura $k$, per $\kappa > 0$ ($\sigma > 0$) l'univers és tancat mentre que per $\kappa < 0$ ($\sigma < 0$) l'univers és obert. Per contra, $\nu < 0$ fa que $k$ i $\kappa$ siguin de signe contrari. En el cas $\kappa = 0$ tenim un univers pla i els segons termes de la banda dreta de les equacions 5.7 i 5.8 desapareixen. Per la seva banda $\nu$ actua com un *índex cosmològic* i indica la desviació de la densitat respecte el seu valor en una cosmologia FLRW sense efectes de renormalització, ja que per $\nu = 0$ també es dóna $\kappa = 0$ i es recuperen així els resultats estàndard.

Veiem com es modifica la dinàmica de l'Univers en funció del valor de l'índex cosmològic $\nu$.

### 5.1.1 L'índex cosmològic $\nu$

Les equacions d'evolució de $\rho(z)$ i $\Lambda(z)$ varien enormement segons el valor que prengui $\nu$. Tot i que a baix *redshift* les discrepàncies són tolerables perquè la condició inicial s'imposa a $z = 0$, a alt *redshift* hi ha comportaments que poden ser incompatibles amb la visió que tenim de l'Univers.

#### Interval $\nu < 0$

En aquest cas la CC es fa negativa i gran cap al passat ($z \to \infty$, però dintre de l'època de radiació on han estat resoltes les equacions) mentre que la densitat de matèria tendeix cap a $\rho_M \to +\infty$. Cap al futur ($z \to -1$) les dues densitats disminueixen en valor absolut, la de matèria anirà cap a zero i la de CC cap a un altre valor dependent de $\nu$. En un univers pla aquest valor ve donat per:

$$\Lambda(z = -1) = \Lambda_0 + \left| \frac{\nu}{1 - \nu} \right| \rho_M^0 \,. \tag{5.11}$$

La CC acaba doncs sent positiva, actualment compleix la condició (que hem imposat) $\Lambda(0) = \Lambda_0$ i en el passat era negativa. El *redshift* de transició entre CC negativa i positiva es va donar a:

$$\ln(1 + z_{tr}) = \frac{\ln \left[ 1 + (1 + \frac{1}{|\nu|}) \, (\Omega_\Lambda^0 / \Omega_M^0) \right]}{3 \, (1 + |\nu|)} \,. \tag{5.12}$$

Per posar alguns números suposem $\Omega_M^0 = 0{,}3$, $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i $\nu = -0{,}1$, llavors $z_{tr} = 1{,}7$. Valors més petits, $\nu = -0{,}05$, signifiquen transicions a *redshifts* més alts, $z_{tr} = 2{,}4$. Així, la física que es desprèn del cas $\nu < 0$ és acceptable sempre i quan $|\nu|$ no sigui extremadament gran, ja que llavors el *redshift* de transició seria prou baix com per haver estat detectat.

#### Interval $\nu = 0$

Recuperació de totes les conclusions obtingudes per un univers amb CC constant.

#### Interval $0 < \nu < 1$

Tant la densitat de matèria com la de CC es fan positives i infinites cap al passat. En el futur la CC pendrà un valor positiu i diferent de zero en general, mentre que la densitat de matèria anirà cap a zero.

Tornem al cas pla on els règims es veuen amb més facilitat. La CC acabarà prenent el valor:

$$\Lambda(z=-1) = \Lambda_0 - \frac{\nu}{1-\nu}\,\rho_M^0\,. \tag{5.13}$$

Així, depenent del valor de $\nu$ el límit assimptòtic acabarà sent positiu o bé negatiu. Es pot comprovar que aquesta característica es manté per alguns valors de la curvatura ($0 < \nu < 1/3$ o bé $1/3 < \nu < 1$).

Com a comentari, cal dir que aquest comportament és el desitjat en teories de cordes o Teoria-M on és necessari que la CC sigui negativa o nul·la en el futur per a poder definir els estats assimptòtics del que s'anomena matriu S. Aquest tipus de teories, doncs, podrien donar en un futur un valor per $\nu$ com a requisit de la pròpia teoria.

#### Interval $\nu = 1$

Aquest cas no és gaire desitjable ja que en el cas pla la densitat de matèria és la mateixa a qualsevol *redshift*. La situació millora quan considerem curvatura positiva (no pas negativa que suposa una densitat de matèria que tendeix a $\rho_M \to -\infty$ en el passat !).

Per curvatura positiva $k > 0$ i $\nu > 0$ s'obté $\kappa > 0$. Amb aquests resultats a l'equació 5.7 es troba una densitat de matèria que va des d'un valor molt gran i positiu en el passat fins a un valor molt petit en el futur. Per la seva part, la CC passa de ser també gran i positiva, a disminuir per canviar de signe i anar creixent un altre cop en valor absolut. La transició es dóna a:

$$z \simeq \exp\left(-\Omega_\Lambda^0/3\Omega_M^0\right) - 1\,. \tag{5.14}$$

Per una curvatura extremadament petita i per tant completament compatible amb les observacions de SNe Ia i fins i tot de CMB, $\Omega_M^0 = 0{,}30$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}71$, s'obté $z_{tr} = -0{,}54$. Així s'hauria d'esperar a un futur llunyà per arribar a l'època de transició.

#### Interval $\nu > 1$

Aquest escenari és el més desfavorit observacionalment ja que implica que degut al balanç d'energia entre $\Lambda$ i $\rho$ quan la CC creix (en mòdul) cap al futur la densitat de matèria també ho fa. Tindríem així un univers que a mida que s'expansiona va augmentant la seva densitat de matèria.

### 5.1.2 Restriccions de la nucleosíntesi primordial

A banda de conèixer els canvis en els comportaments que genera la introducció del *running* de la CC a l'actualitat, també és important veure com afecten el passat. Les conclusions de l'actual model estàndard cosmològic són prou robustes com per a què les noves alternatives hagin de respectar algunes d'aquestes conclusions, a no ser que el marc que imposi el nou model sigui, en conjunt, tant o més consistent que l'actual.

Una d'aquestes conclusions a respectar és la de les abundàncies primordials dels elements lleugers. El fet que les abundàncies primordials siguin les observades limita el valor de la densitat durant la nucleosíntesi primordial i acota el ritme d'expansió de l'Univers durant aquesta època. D'aquesta manera tenim un segon punt on mesurar la densitat, i el model analitzat haurà de ser compatible tant amb les densitats actuals com durant la nucleosíntesi.

Per veure què passa durant la nucleosíntesi amb aquest model cal extendre les equacions a l'època dominada per la radiació. Això implica canviar l'equació d'estat de la matèria ($p_M = 0$) per la de la radiació ($p_R = \rho_R/3$) amb la qual cosa l'equació de continuïtat es converteix en:

$$\dot{\Lambda}_R + \dot{\rho}_R + 4\,H\,\rho_R = 0\,. \tag{5.15}$$

Seguint els mateixos passos que per a l'era dominada per la matèria, la densitat de radiació es pot expressar com:

$$\rho_R(z;\nu) = \left(\rho_R^0 + \frac{\kappa}{2-4\nu}\right)(1+z)^{4\,(1-\nu)} - \frac{\kappa}{2-4\nu}\,(1+z)^2. \tag{5.16}$$

En el cas de la radiació, però, és més apropiat expressar el resultat en funció de la temperatura del bany de fotons, sent $(1+z) \propto T$,

$$\rho_R(T;\nu) \;=\; \frac{\pi^2}{30}\,g_*\,T^4\left(\frac{T_0}{T}\right)^{4\,\nu} + \frac{\kappa}{2-4\nu}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4\,(1-\nu)} - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right], \tag{5.17}$$

on $T_0 \simeq 2{,}75\,K = 2{,}37\times 10^{-4}\,eV$ és la temperatura actual del CMB i el nombre de graus de llibertat ultrarelativistes, $g_*$, és de l'ordre de la unitat ( $g_* = 2$ per fotons i $g_* = 3{,}36$ amb neutrins inclosos). Equivalentment la densitat de CC és:

$$\Lambda_R(T;\nu) = \Lambda_0 + \rho_R^0\,f_R(T) + \rho_c^0\,g_R(T)\,, \tag{5.18}$$

amb

$$f_R(T) = \frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4\,(1-\nu)} - 1\right], \tag{5.19}$$

$$g_R(T) \;=\; -\frac{\kappa}{2-4\nu}\left\{\frac{T^2-T_0^2}{T_0^2} - \frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{4\,(1-\nu)} - 1\right]\right\}. \tag{5.20}$$

La primera limitació d'aquestes equacions podria venir donada pel fet que coneguda la densitat en l'època de la nucleosíntesi, aquesta no pot diferir excessivament de la predita pel model estàndard i, per tant, l'índex $\nu$ ha de ser prou baix:

$$|\nu| \ll 1\,. \tag{5.21}$$

A més, a l'època de la nucleosíntesi, la CC ha de ser inferior a la densitat de matèria per a què es puguin formar nuclis atòmics tal i com observem. Imposem que la diferència entre les dues sigui de com a mínim un ordre de magnitud i obtenim la restricció que anem trobant repetidament:

$$\frac{\Lambda_R(T)}{\rho_R(T)} \simeq \frac{\nu}{1-\nu} \simeq \nu \ll 1\,, \tag{5.22}$$

on el desenvolupament és vàlid per un univers pla.

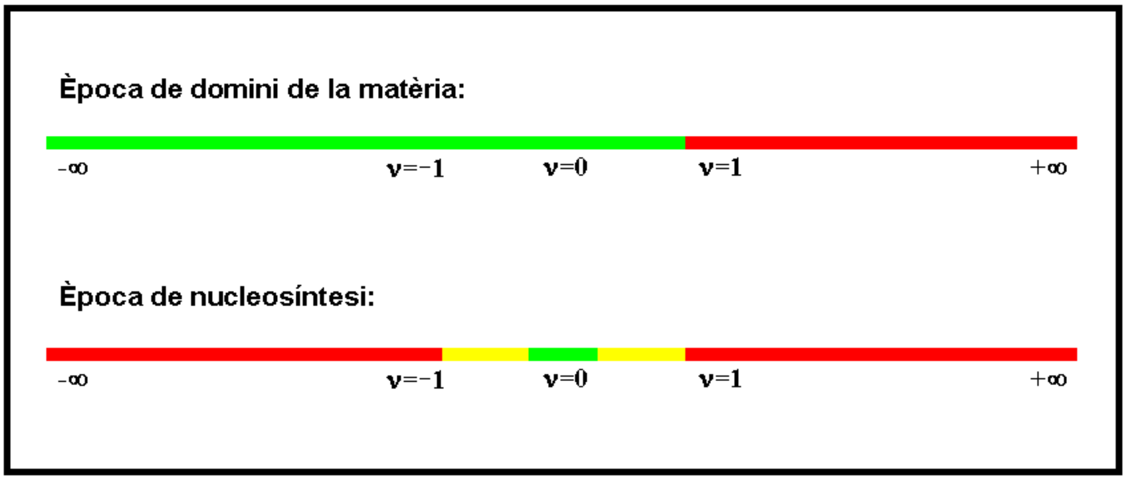


FIG. 5.1 – Rangs possibles (zones verdes) i descartats (vermelles) per al paràmetre $\nu$. L'època dominada per la matèria és compatible amb $\nu < +1$ mentre que l'època de la nucleosíntesi restringeix el seu valor fins a fer-lo proper a zero.

Aquest límit encara obté una cota més severa a partir de l'espectre de fluctuacions de densitat obtingut de les dades de CMB i de grans estudis de galàxies, el qual imposa un màxim de $\nu_{max} = 2{,}3\times10^{-3}$ (l'anàlisi amb aquest tipus de dades ha estat realitzat per R. Opher i A. Pelinson a [54]).

### 5.1.3 Comportament en el rang $|\nu| \ll 1$

Un cop determinat el rang més probable del paràmetre $\nu$ es centrarà tot l'anàlisi posterior dintre d'aquest interval. És útil doncs, la definició del valor més natural que pren aquest índex, aquell que s'obté per un $\sigma = +1$ i $M = M_P$:

$$\nu_0 \equiv \frac{1}{12\,\pi} \simeq 2{,}6 \times 10^{-2}. \tag{5.23}$$

Els diferents paràmetres es representaran pels primers múltiples de $\nu_0$.

La figura 5.2 mostra com varia la densitat de matèria (a) i de constant cosmològica (b) en un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. L'interval de *redshift* va des del punt on s'espera tenir les últimes SNe Ia a alt *redshift*, $z = 2$, fins a un punt del futur situat a $z = -0{,}5$.

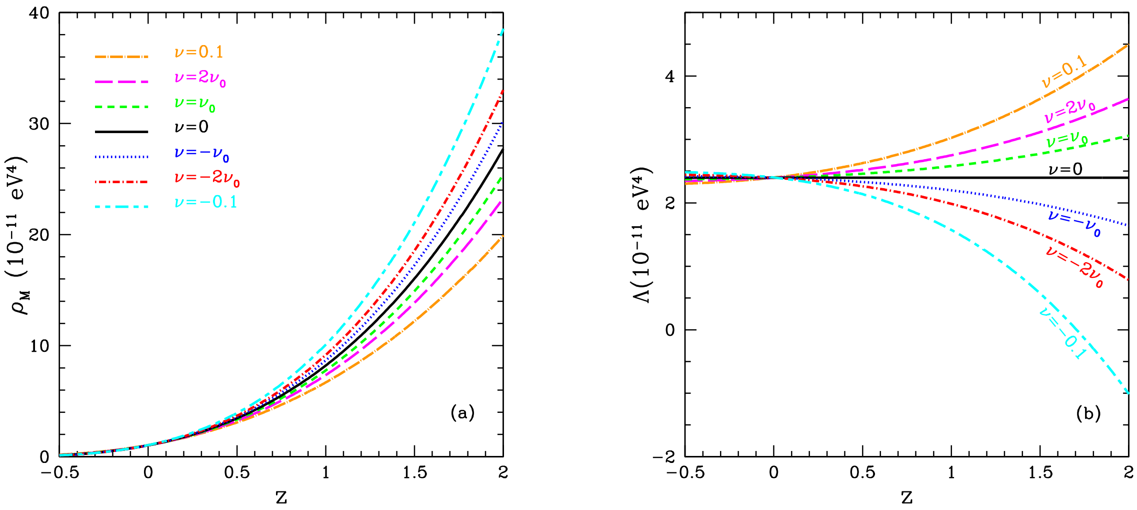


FIG. 5.2 – Densitat de matèria (a) i de CC (b) en un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. Els diferents tipus de línies representen un diferent grau de distinció respecte al model estàndard amb $\nu = 0$.

Com a resultat de permetre una funció $\beta_\Lambda$ no nul·la, apareix la correlació entre la variació $\rho_M(z;\nu)$ i $\Lambda(z;\nu)$. Aquestes evolucions són importants en cosmologia ja que apareixen directament a l'expressió de la distància lluminositat i formaran part activa en la determinació dels paràmetres cosmològics (capítol 6).

Comparant amb el model cosmològic estàndard ($\nu = 0$), es veu que per un índex cosmològic negatiu la densitat de matèria creix més ràpid cap al passat, mentre que per $\nu$ positiva el creixement és més lent que l'habitual $(1+z)^3$. Mirant cap al futur la distinció no és apreciable perquè per qualsevol valor de $\nu$ la densitat de matèria tendeix a zero. El contrari passa per la CC. És per $\nu$ positiva (negativa) que la CC creix (decreix) cap al passat, mentre que en el futur tendeix a un valor positiu i constant. Cal recordar que en tot cas aquests comentaris es refereixen a $|\nu| \leq 0{,}1$ ja que com s'ha vist, rangs més amplis impliquen altres tipus de comportaments.

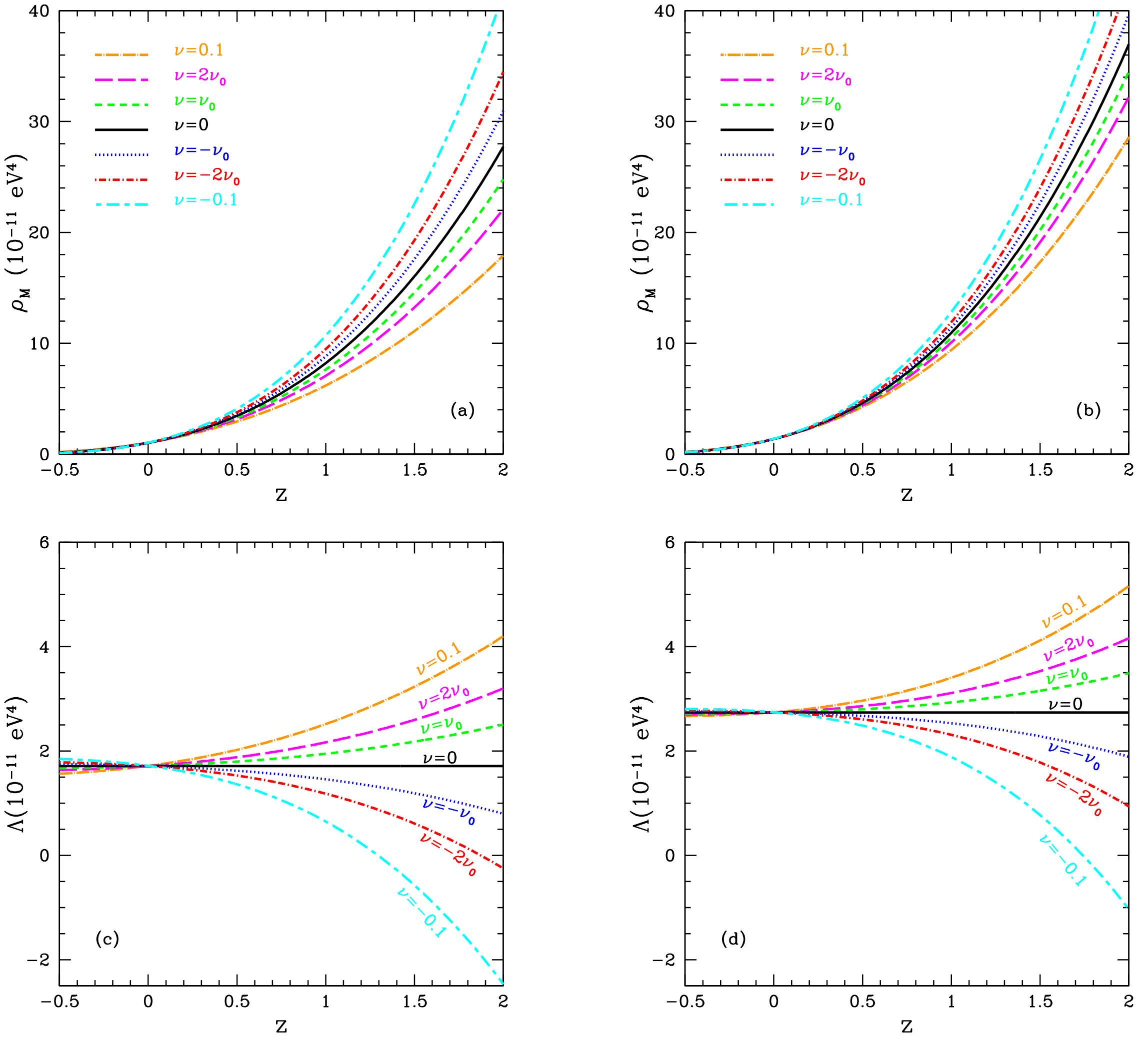

FIG. 5.3 – Gràfiques d'evolució de la densitat de matèria i de CC per a un univers obert amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}5$ (esquerra) i per a un univers tancat amb $\Omega_M^0 = 0{,}4$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}8$ (dreta).

La figura 5.3 reprodueix les mateixes funcions que la 5.2 pel cas de curvatura no nul·la. Qualitativament s'obtenen uns resultats numèrics similars, però les característiques es veuen més marcades ja per $\nu$ més baixos. En particular, és per universos tancats i $\nu < 0$ quan s'obté la major evolució de CC i, per tant, aquest seria el cas més afavorit per a obtenir contrapartida observacional.

Veient les evolucions de la densitat de matèria i de la constant cosmològica ens podríem preguntar si tenir valors tan grans de CC en el passat pot causar problemes a la formació d'estructura. En aquest model, però, la CC es manté sempre per sota de la densitat de matèria, i per $\nu \ll 1$ hem vist que la nucleosíntesi tampoc es veia perjudicada (veure secció 5.1.2). De fet, la igualtat entre matèria i CC s'ha donat recentment. En el cas d'univers pla amb els paràmetres utilitzats a la figura 5.2 ($\Omega_M^0 =$ 0,3 i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$) s'obté com a *redshift* d'igualtat $z = (0{,}29\,, 0{,}31\,, 0{,}32\,, 0{,}34\,, 0{,}36)$ per $\nu = (-2\nu_0, -\nu_0,\, 0\,, +\nu_0, +2\nu_0)$ respectivament. Per valors de $\nu$ més grans encara dintre del límit 5.22 els *redshifts* segueixen sent relativament baixos: $z = (0{,}27\,, 0{,}43)$ per $\nu = (-0{,}1\,, +0{,}1)$, i en cap cas la formació d'estructura es veurà alterada. El canvi del *redshift* d'igualtat en funció de $\nu$ es pot veure representat a la corba inferior de la figura 5.7 (b).

Ja s'ha dit anteriorment que les funcions $\rho_M(z;\nu)$ i $\Lambda(z;\nu)$ són les que més interès tenen en cosmologia, ja que són les úniques directament observables. Per veure l'efecte que la introducció del *running* té a la distància lluminositat podem mirar el percentatge de variació de la funció. Centrem-nos en el cas pla i desenvolupem $\Lambda(z)$ a primer ordre en $\nu$:

$$\Lambda(z) \simeq \Lambda_0 + \nu\, \rho_M^0\, \left[(1+z)^3 - 1\right] . \tag{5.24}$$

Llavors l'efecte que causa la variació ve donat per

$$\delta_\Lambda \equiv \frac{\Lambda(z;\nu) - \Lambda_0}{\Lambda_0} = \nu\, \frac{\Omega_M^0}{\Omega_\Lambda^0}\, \left[(1+z)^3 - 1\right] . \tag{5.25}$$

Aquest efecte és important a *redshifts* alts des del punt de vista de les SNe Ia. A $z = 1,5$ i amb una cosmologia $\Omega_M^0 = 0{,}3$, $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i $\nu = \nu_0$ l'efecte és del $\delta_\Lambda = 16\%$. Si considerem $\nu = 0{,}1$, encara dintre de valors raonables ($\nu = 0{,}1$ implica una escala de massa efectiva de $M \lesssim 2\, M_P$) la desviació augmenta fins al 48%. Aquests resultats haurien de ser perfectament distingibles amb futurs experiments de supernoves com SNAP [55].

Les desviacions $\delta_\Lambda$ per als primers múltiples de $\nu_0$ es mostren a la figura 5.4 (a). La segona gràfica de la mateixa figura representa el ritme de variació de $\Lambda(z)$ en el *redshift* normalitzat a la densitat crítica actual (Fig. 5.4 (b)), que és una altra manera de veure com varia la CC respecte d'una veritable constant. De fet, aquesta funció no és res més que un desenvolupament en sèrie de Taylor de $\Lambda(z)$ a primer ordre entorn $z = 0$, i per tant, és una altra funció directament observable. Cap d'aquestes corbes és simètrica en $\nu$ a alts *redshifts*. Tal i com s'observa en la forma de l'equació 5.8 el *running* és major per $\nu < 0$ que per $\nu > 0$, i això es veu reflectit en les dues figures.

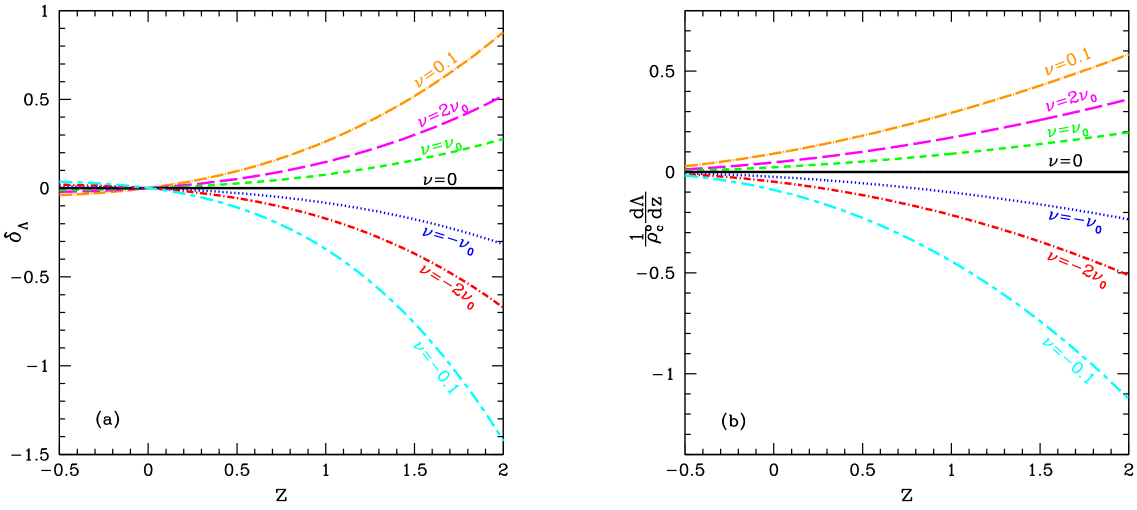


FIG. 5.4 – (a) Desviació $\delta_\Lambda$ i (b) ritme de variació $(1/\rho_c^0)\, d\Lambda/dz$ en un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. Les corbes no són simètriques en $\nu$ degut a la forma que pren $\Lambda(z)$ (Eq. 5.8).

## 5.2 Altres característiques

La densitat de matèria i de CC no són les úniques magnituds que es veuen afectades per una dependència en $\nu$. També són significatives les desviacions que apareixen respecte al cas estàndard en el paràmetre de Hubble, els paràmetres cosmològics i el de deceleració, per exemple.

### 5.2.1 El paràmetre de Hubble

Un cop conegudes les evolucions en el *redshift* de la densitat de matèria i de CC es pot obtenir la llei d'evolució del paràmetre de Hubble en aquest model simplement introduint aquestes evolucions a l'equació 3.20 o bé integrant l'expressió 5.2. De qualsevol manera el resultat ve donat per:

$$\begin{aligned} H^2(z;\nu) \;&=\; H_0^2 \left\{ 1 + \Omega_M^0 \, \frac{(1+z)^{3\,(1-\nu)} - 1}{1-\nu} \right. \\ &\left. + \frac{1-\Omega_M^0-\Omega_\Lambda^0}{1-3\,\nu} \left[ (1+z)^2 - 1 - 2\nu \, \frac{(1+z)^{3\,(1-\nu)} - 1}{1-\nu} \right] \right\} . \end{aligned} \tag{5.26}$$

Evidentment aquesta expressió és una generalització i, per tant, per $\nu = 0$ es recupera el resultat estàndard:

$$\begin{aligned} H^2(z) &= H_0^2 \left\{1 + \Omega_M^0 \left[(1+z)^3 - 1\right] + (1 - \Omega_M^0 - \Omega_\Lambda^0) \left[(1+z)^2 - 1\right]\right\} \\ &= H_0^2 \left[\Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_K^0 (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0\right] . \end{aligned} \tag{5.27}$$

Desenvolupem ara l'equació 5.26 per $\nu \ll 1$. Això ho podem fer perquè hem vist que hi ha restriccions sobre el seu valor que ens garanteixen que aquest límit és vàlid. El paràmetre de Hubble tendeix sempre, independentment de la curvatura, a un valor constant en el futur ($z \to -1$) que depèn de $\nu$:

$$H^2(z=-1;\nu) = H_0^2 \left[1 - \frac{\Omega_M^0 + \Omega_K^0}{1-\nu}\right] \simeq H_0^2 \left[\Omega_\Lambda^0 - \nu\,(\Omega_M^0 + \Omega_K^0)\right] . \tag{5.28}$$

Com que a cada *redshift* la funció $H(z,\nu)$ està relacionada amb $\Lambda(z,\nu)$ apareix una desviació respecte al cas $\Lambda(z) = \Lambda_0$, i aquesta variació podria arribar a ser observable. Considerem un cas per veure-ho. Agafem un univers pla ($\kappa = 0$) i continuem en el límit de $\nu$ petita. A primer ordre en $\nu$ es pot definir

$$\Delta(z;\nu) \equiv H^2(z;\nu) - H^2(z) \simeq -\nu\, H_0^2 \Omega_M^0 \left\{1 + (1+z)^3 \left[3\ln(1+z) - 1\right]\right\} , \tag{5.29}$$

i així la desviació relativa d'aquest model respecte l'estàndard, que representa el diferent ritme a què $H(z;\nu)$ s'apropa al valor constant donat per 5.28 en comparació al que ho fa $H(z;\nu=0)$, és:

$$\begin{aligned} \delta H(z;\nu) &\equiv \frac{H(z;\nu) - H(z)}{H(z)} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta(z;\nu)}{H(z)} \\ &= -\frac{1}{2}\,\nu\,\Omega_M^0\, \frac{1 + (1+z)^3\ (3\ln(1+z) - 1)}{1 + \Omega_M^0\ [(1+z)^3 - 1]} . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Aquesta correcció és negativa per $\nu > 0$ i, per tant, en aquest cas la constant de Hubble es mantindria sempre per sota de l'esperada en el model estàndard (el contrari per $\nu < 0$). Aquest comportament s'observa a la figura 5.5 primer en aquest cas pla i després en un univers obert amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}5$. Tot i que les variacions que s'hi veuen són realment petites ($< 10\%$ per $\nu < 0{,}1$), $H$ és el paràmetre que experimenta unes variacions menys importants i no és, per tant, el més indicat per a distingir aquest model del d'un de constant cosmològica real.

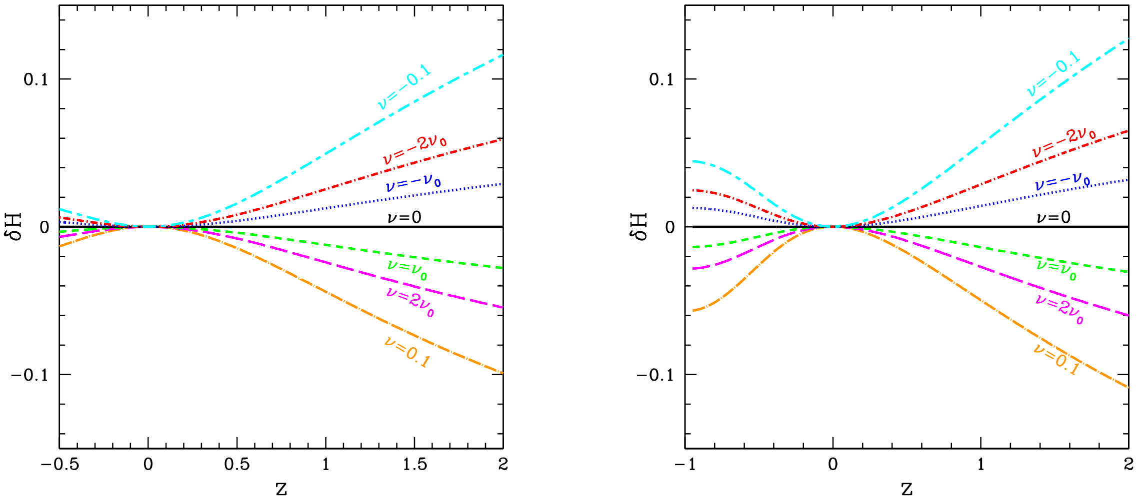


FIG. 5.5 – Desviació del paràmetre de Hubble pels diferents $\nu$ indicats sobre les corbes respecte a un univers amb CC constant. En la figura de l'esquerra l'univers és pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ mentre que a la de la dreta la curvatura és negativa amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}5$.

### 5.2.2 La regla de suma cosmològica

Quan l'equació de Friedmann (Eq. 3.20) es divideix pel mateix paràmetre de Hubble $H(z)$ s'obté el que es coneix com la *regla de suma cosmològica*. En aquest cas la relació també inclou l'índex cosmològic i, per tant, es veu modificada respecte les expressions habituals.

$$1 = \Omega_M(z;\nu) + \Omega_\Lambda(z;\nu) + \Omega_K(z;\nu)\,, \tag{5.31}$$

on

$$\Omega_M(z;\nu) \equiv \frac{\rho_M(z;\nu)}{\rho_c(z;\nu)}\,, \quad \Omega_\Lambda(z;\nu) \equiv \frac{\Lambda(z;\nu)}{\rho_c(z;\nu)}\,, \quad \Omega_K(z;\nu) \equiv \frac{-k}{H^2(z;\nu)\,a^2} \tag{5.32}$$

i $\rho_c(z;\nu) \equiv 3\,H^2(z;\nu)/8\,\pi\,G_N$ és la densitat crítica a cada instant de temps.

Si com sembla l'Univers és pla, la regla de la suma es redueix a $\Omega_M(z;\nu) + \Omega_\Lambda(z;\nu) = 1$, i és, en principi, "mesurable". Observacionalment es poden obtenir $H_0$, $\Omega_M^0$ i $\Omega_\Lambda^0$, i a partir d'aquests es determinen les funcions a qualsevol $z$ i $\nu$.

$$\Omega_M(z;\nu) = \frac{8\,\pi\,G\,\rho_M(z;\nu)}{3\,H^2(z;\nu)} = \frac{\Omega_M^0\,(1+z)^{3\,(1-\nu)}}{1 + \frac{\Omega_M^0}{1-\nu}\left[(1+z)^{3\,(1-\nu)} - 1\right]} \tag{5.33}$$

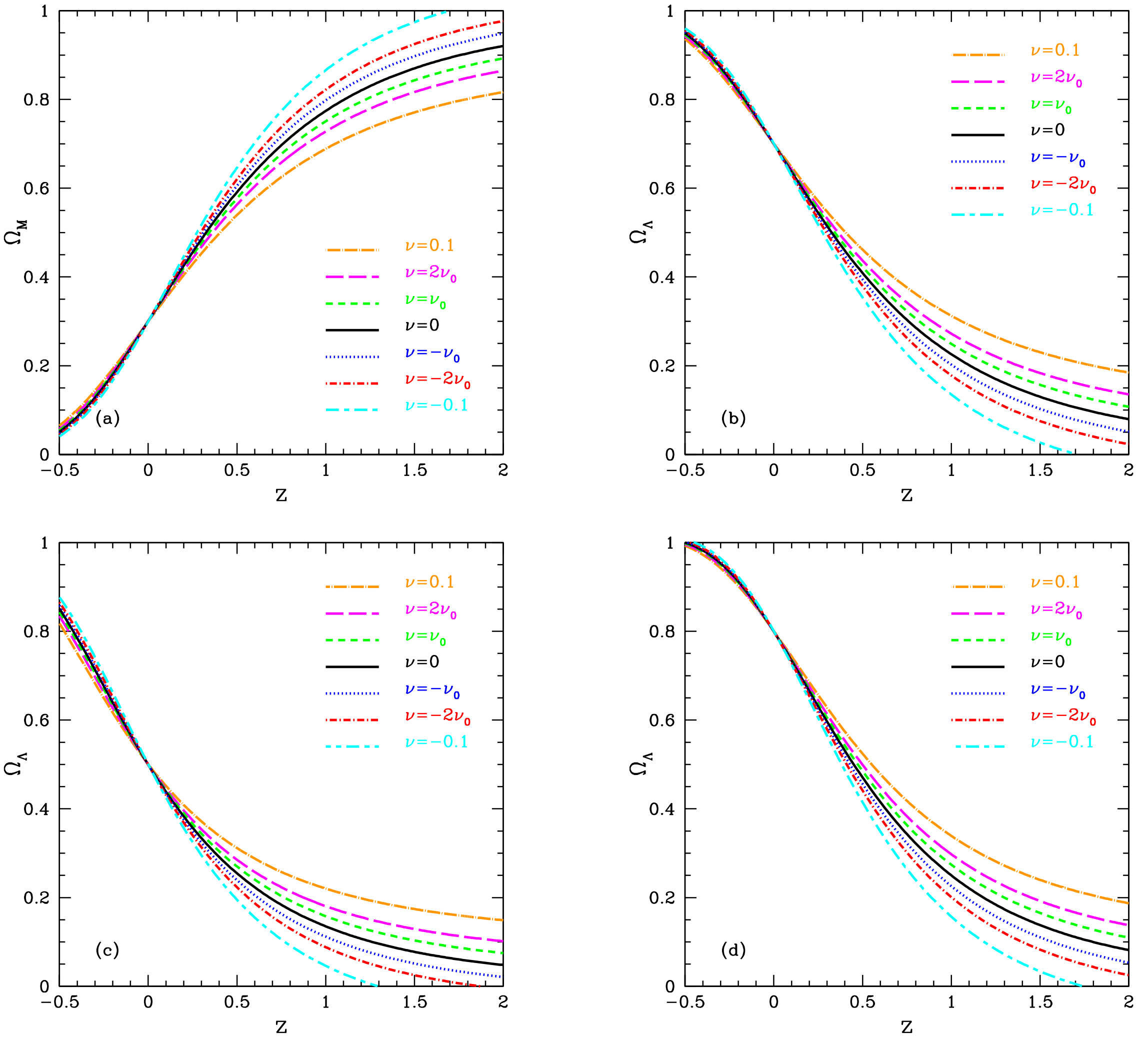


FIG. 5.6 – Gràfiques d'evolució de $\Omega_M$ (a) i $\Omega_\Lambda$ (b) per a un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. A baix es mostra l'evolució de $\Omega_\Lambda$ per un univers obert amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}5$ (c) i per a un univers tancat amb $\Omega_M^0 = 0{,}4$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}8$ (d).

$$\Omega_\Lambda(z;\nu) \;=\; \frac{8\,\pi\,G\,\Lambda(z;\nu)}{3\,H^2(z;\nu)} = \frac{\Omega_\Lambda^0 + \frac{\nu}{1-\nu}\,\Omega_M^0\left[(1+z)^{3\,(1-\nu)}-1\right]}{1+\frac{\Omega_M^0}{1-\nu}\,\left[(1+z)^{3\,(1-\nu)}-1\right]}\,. \tag{5.34}$$

D'aquestes equacions és fàcil mirar els límits en el passat i futur:

$$\begin{aligned}\Omega_M(z=\infty) &= 1-\nu\,, \qquad \Omega_\Lambda(z=\infty)=\nu\,,\\ \Omega_M(z=-1) &= 0\,, \qquad\quad\; \Omega_\Lambda(z=-1)=1\,,\end{aligned} \tag{5.35}$$

que evidentment segueixen la regla de la suma,

$$\Omega_M(z=\infty)+\Omega_\Lambda(z=\infty) \;=\; 1 \;=\; \Omega_M(z=-1)+\Omega_\Lambda(z=-1)\,. \tag{5.36}$$

És interessant de notar que cap al futur $\Omega_\Lambda(z;\nu) \to 1$ i $\Omega_M(z;\nu) \to 0$ tant en aquest model com en l'estàndard. De fet, el punt $(\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 1)$ és un punt fix cap al qual es dirigeix el fluid còsmic independentment del valor de $\nu$. Cap al passat les coses són diferents, la tendència assimptòtica és $\Omega_\Lambda(z \to \infty) \to \nu$, i així, a diferència del model estàndard, $\Omega_\Lambda$ no s'anul·la mai. Tots aquests comportaments estan reflectits a la figura 5.6 per un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. A la part inferior de la matexia figura es veu com $\Omega_\Lambda$ tendeix cap als seus límits més o menys ràpidament en funció de la curvatura.

### 5.2.3 El paràmetre de deceleració

Un altre paràmetre interessant que descriu la dinàmica de l'Univers és el de deceleració. Actualment hi ha un número considerable de SNe Ia properes al punt on l'Univers passa d'estar decelerat a accelerat $(z^*)$ i per tant s'ha convertit en una característica observacional distintiva. Aquest *redshift* depèn del model en concret, i en el nostre cas

$$q(z;\nu) = -\frac{\ddot{a}\, a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a\, H^2(z;\nu)} = \frac{1}{2}\left[\Omega_M(z;\nu) - 2\,\Omega_\Lambda(z;\nu)\right] , \tag{5.37}$$

o equivalentment,

$$q(z;\nu) \;=\; -1 - \frac{\dot{H}}{H^2} \;=\; -1 + \frac{1}{2}\,(1+z)\,\frac{1}{H^2(z;\nu)}\,\frac{dH^2(z;\nu)}{dz} . \tag{5.38}$$

A la figura 5.7 (a) s'observa el paràmetre de deceleració per un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. Tot i que només es mostra el cas pla, les característiques son les mateixes per a qualsevol curvatura raonable, és a dir, per a valors compatibles amb els recents resultats de CMB. La tendència futura és un univers cada cop més accelerat provinent d'universos decelerats. El valor al qual tendeix aquesta deceleració passada depèn de l'índex cosmològic.

Si ens centrem en el cas pla, que com hem vist és prou representatiu, i introduïm les funcions $\Omega_M(z;\nu)$ i $\Omega_\Lambda(z;\nu)$, obtenim un desenvolupament a primer ordre en $\nu$ que ens serà útil per a fer alguns càlculs analítics:

$$\begin{aligned} q(z;\nu) = {} & -1 + \frac{3}{2}\,\frac{\Omega_M^0\,(1+z)^3}{1+\Omega_M^0\left[(1+z)^3-1\right]} \\ & \times \left\{1 - \nu\left[3\ln(1+z) + \frac{\Omega_M^0\left[(1+z)^3 - 1 - 3(1+z)^3\ln(1+z)\right]}{1+\Omega_M^0\left[(1+z)^3-1\right]}\right]\right\} . \end{aligned} \tag{5.39}$$

A $z = 0$, tot i la introducció de $\nu$, es recupera el resultat estàndard per la cosmologia de FLRW en un univers pla:

$$q(0;\nu) = -1 + \frac{3}{2}\,\Omega_M^0 = \frac{\Omega_M^0}{2} - \Omega_\Lambda^0 \equiv q_0 . \tag{5.40}$$

Si fem al contrari i eliminem la dependència en $\nu$, queda definit el *redshift* on l'acceleració és nul·la $z^*$ en el model estàndard:

$$q(z;0) \;=\; -1 + \frac{3}{2}\,\frac{\Omega_M^0\,(1+z)^3}{1+\Omega_M^0\,[(1+z)^3-1]}\,, \tag{5.41}$$

$$z^* = -1 + \sqrt[3]{2\,\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_M^0}} \simeq 0{,}67\,. \tag{5.42}$$

El valor numèric es correspon amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i separa l'Univers en deceleració de l'Univers amb acceleració. Aquest punt no té res a veure amb aquell que separa l'Univers dominat per la matèria de l'Univers dominat per la CC (Fig. 5.7 (b)). De fet, abans que la CC iguali la matèria, ja és prou important com per a què produeixi l'acceleració, i el *redshift* de la transició matèria/CC és posterior (secció 5.1.3 pels valors numèrics) al del pas acceleració/deceleració.

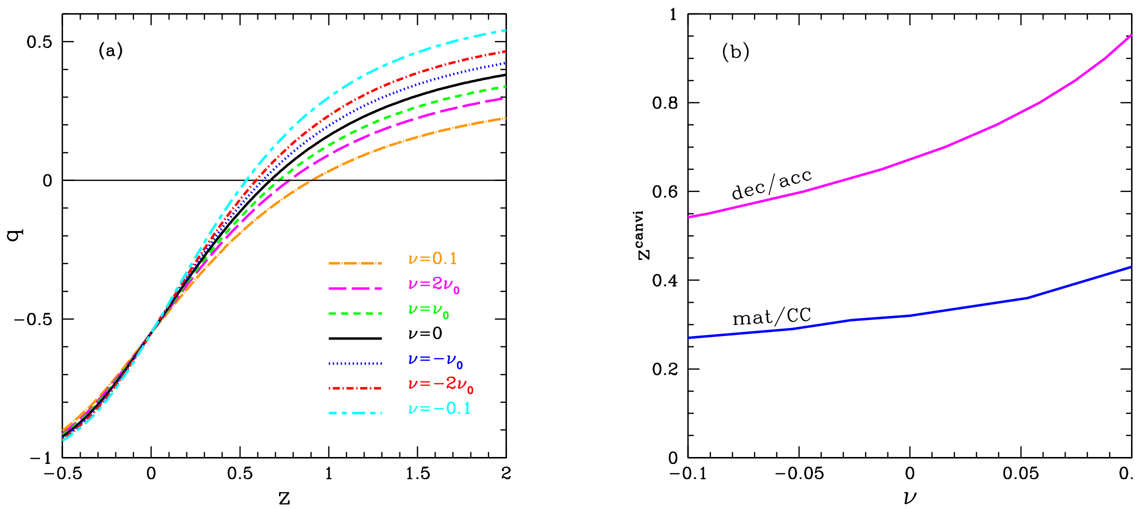


FIG. 5.7 – (a) Paràmetre de deceleració i (b) *redshifts* de transició tant per al pas deceleració/acceleració com per al de domini de la matèria/CC. Valors més positius de $\nu$ ens allunyen dels *redshifts* de transició.

En aquest model ens interessa obtenir com varia $z^*$ en funció del paràmetre $\nu$. Com que l'acceleració comença per $\Omega_M(z) < 2\,\Omega_\Lambda(z)$ considerar un univers pla implica un canvi de celeritat a $\Omega_\Lambda(z;\nu) = 1/3$, o equivalentment a

$$\frac{1}{2}\,(1+z^*)^3 - \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_M^0} \;=\; \nu\,\left\{(1+z^*)^3\left[1+\frac{3}{2}\,\ln(1+z^*)\right]-1\right\}\,. \tag{5.43}$$

La solució a aquesta equació es veu representada a la corba superior de la figura 5.7 (b). Com més negatiu és l'índex $\nu$ més propera al nostre temps ha estat la transició, sent l'evolució no simètrica respecte al cas estàndard $\nu = 0$: mentre que considerar una $\nu = +0{,}1$ causa un corriment en $z^*$ del 36%, el valor negatiu $\nu = -0{,}1$ només provoca una variació respecte al cas estàndard del 21%. Com ha anat succeint en la representació d'una gran part de les funcions considerades, això és conseqüència de la no simetria respecte de $\nu$ de la funció original $\Lambda(z)$.

### 5.2.4 Pseudoequació d'estat

En el capítol 3 s'ha comentat que una de les diferències entre la CC (tant constant com amb *running*) i un camp de quinta essència és la forma de l'equació d'estat. La CC té per definició una equació d'estat $p = -\rho$, és a dir, $w_\Lambda = -1$ a qualsevol punt de la història de l'Univers, mentre que un camp $\phi$ de quinta essència varia el valor de l'equació d'estat com a funció del mateix $\phi$:

$$w_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi} - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi} + V(\phi)}\,. \tag{5.44}$$

De totes maneres, quan es vol contrastar un model teòric amb observacions el que s'acostuma a fer (o, com a mínim, el que es farà en aquest treball) és comparar un determinat model amb les observacions. Això *no* valida en cap cas el model en qüestió sinó que determina com ha de ser el model (acotant valors de paràmetres lliures, per exemple) per a ser el màxim de coherent possible amb els resultats experimentals. Amb tot això el que es vol mostrar és que tot i que en un futur s'esperen obtenir dades de SNe Ia a alt *redshift* d'excel·lent qualitat que permetran acotar el paràmetre de l'equació d'estat, no podem esperar trobar $w_X = -1$ per confirmar aquests tipus d'escenaris amb CC variables. La base per al contrast amb observacions és el paràmetre de Hubble. L'equació 3.24 d'aquest paràmetre amb $w(z) = -1$ només reprodueix un univers amb constant cosmològica constant, i això és degut a què per deduir la forma de $\Omega_X(z)$ se suposa que la densitat de la forma d'energia X i de la matèria es conserven separadament, cosa que no passa per una $\Omega_X(z) = \Lambda(z)$.

Per tal de poder comparar directament aquests models de CC variable definirem una *pseudoequació d'estat*, $\tilde{w}_\Lambda$, a la manera de la definida per una component X com l'anterior. En aquest cas, però, no tindrà res a veure amb la veritable equació d'estat de la CC ($w_\Lambda$), serà merament una funció matemàtica que substituïda en l'equació del paràmetre de Hubble reproduirà els resultats correctes. Així no tindrà al darrera cap tensor d'energia moment, ja que s'haurà definit una pressió $p_\Lambda$ només per a què matemàticament satisfaci l'equació:

$$\frac{d\Lambda}{dt} + 3H(\Lambda + p_\Lambda) = 0\,. \tag{5.45}$$

Això sí, les funcions $\rho(z)$ i $\Lambda(z)$ necessàries per acabar de definir l'equació diferencial anterior són aquelles que s'obtenen de resoldre el sistema d'equacions 5.1-5.2-5.3 amb l'equació de continuïtat acoblada.

Amb aquesta definició podem determinar la pseudoequació d'estat corresponent $p_\Lambda(z) = \tilde{w}_\Lambda(z)\Lambda(z)$ com aquella que compleix l'equació 5.45:

$$(1+z)\frac{d\Lambda}{dz} - 3\left[1 + \tilde{w}_\Lambda(z)\right]\Lambda = 0\,, \tag{5.46}$$

$$\tilde{w}_\Lambda = \frac{1}{3}(1+z)\frac{1}{\Lambda(z)}\frac{d\Lambda(z)}{dz} - 1\,. \tag{5.47}$$

Suposem un univers pla on és fàcil veure, substituint l'equació 5.8 a l'anterior, que

$$\tilde{w}_\Lambda = \frac{\Omega_M^0 \nu (1+z)^{3(1-\nu)}}{\Omega_\Lambda^0 + \Omega_M^0 \frac{\nu}{1-\nu}\left[(1+z)^{3(1-\nu)} - 1\right]} - 1\,. \tag{5.48}$$

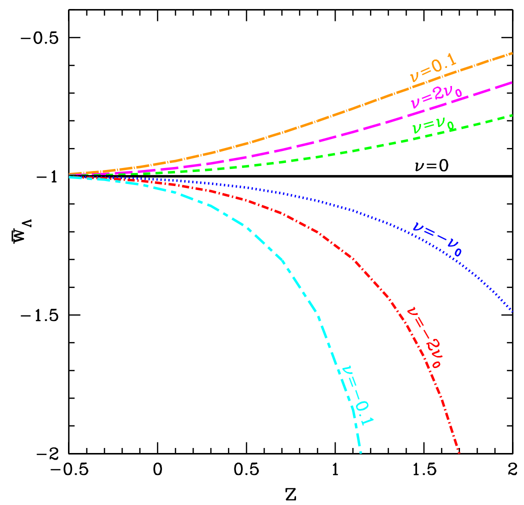


FIG. 5.8 – Forma de la pseudoequació d'estat per a un univers pla amb $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$.

Si fem uns quants números es pot veure que, suposant el model més acceptat ($\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$) amb la incorporació de $\nu = \nu_0$, es produeix una lleugera evolució de

$\tilde{w}_\Lambda$ amb el *redshift* que fa que ni a $z = 0$ es recuperi exactament el valor de $w_\Lambda = -1$:

$$\tilde{w}_\Lambda(z = 0{,}0) = -0{,}99\,, \qquad \tilde{w}_\Lambda(z = 0{,}5) = -0{,}96\,, \qquad \tilde{w}_\Lambda(z = 1{,}0) = -0{,}91\,. \quad (5.49)$$

A la figura 5.8 es mostra aquest comportament per diferents valors de $\nu$. En tots els casos $\tilde{w}_\Lambda \to -1$ cap al futur, mentre que s'hi va allunyant en el passat. Per valors positius de $\nu$ un model de CC variable es veu sota l'anàlisi d'un de quinta essència com si tingués una equació d'estat lentament variable cap a $\tilde{w}_\Lambda > 0$. Per $\nu$ negatiu, en canvi, $\tilde{w}_\Lambda$ es va fent cada cop més negatiu, i aparentment estaríem en el cas d'un *model fantasma* [56–58]. Una energia fantasma és aquella que amb densitat positiva té una equació d'estat amb $w_X < -1$. Tot i que les dades observacionals afavoreixen aquests universos, presenten alguns desavantatges teòrics (o potser millor dit característiques desencoratjadores), ja que no compleixen la condició d'energia nul·la ($\rho_X + p_X \geq 0$) i preveuen un univers que acaba completament esgarrat (*Big Rip*). Els models de CC variable amb $\nu < 0$ condueixen així a una pseudoequació d'estat efectiva $\tilde{w}_\Lambda < -1$ tot i que la real es mantingui $w_\Lambda = -1$. D'aquesta manera s'obté la fenomenologia observada amb les dades sense crear cap nou problema teòric.

# Capítol 6

# Constrast dels models amb supernoves a alt *redshift*

Fins ara s'ha vist la motivació d'una branca de models cosmològics basats en les equacions del grup de renormalització, però tot i que teòricament aquests models (o qualsevol altre) siguin més o menys justificables necessiten un recolzament observacional per a poder ser útils. En aquest capítol es compararan les magnituds observades de SNe Ia d'alt *redshift* amb les magnituds que s'haurien d'observar en un univers amb constant cosmològica variable. Aquesta comparació permetrà restringir, a més, els paràmetres lliures dels models.

## 6.1 Eines matemàtiques

### 6.1.1 Ajust $\chi^2$

Per tal de fer aquesta comparació entre les magnituds observades i les que prediu un model cosmològic en particular ens basarem en un ajust $\chi^2$.

La idea bàsica és la de minimitzar la diferència entre l'observació i el model en funció dels paràmetres cosmològics i dels propis per cada cas, és a dir, minimitzar la quantitat:

$$\chi^2(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \alpha, \mathcal{M}) = \sum_i \frac{\left\{\mathcal{M} + 5\log_{10}\left(D_L(z_i, \Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu)\right) - m_i^{eff} - \alpha(s_i - 1)\right\}^2}{\sigma_i^2}, \tag{6.1}$$

on s'està utilitzant que la relació teòrica magnitud-*redshift* és la que es dóna a l'equació 2.12, i cal calibrar la magnitud observada tal i com s'indica a l'equació 2.9.

En comptes de realitzar una minimització analítica de la funció $\chi^2$ derivantla en funció de cada paràmetre tal i com es faria a través de les equacions normals per exemple [59], definirem aquí una malla de punts a l'espai de paràmetres $(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \alpha, \mathcal{M})$ i calcularem el valor de $\chi^2$ a cada un d'aquests punts. Un cop trobat el punt que en aquest espai té un $\chi^2$ mínim ($\chi^2_{min}$) és fàcil definir les regions de confiança entorn aquest com aquelles que compleixen:

TAULA 6.1 – Definició dels nivells de confiança.

| Condició | Probabilitat | $\sigma$ |
|---|---|---|
| $\chi^2 - \chi^2_{min} = 2{,}30$ | 68,27 % | $1\sigma$ |
| $\chi^2 - \chi^2_{min} = 6{,}17$ | 95,40 % | $2\sigma$ |
| $\chi^2 - \chi^2_{min} = 11{,}80$ | 99,73 % | $3\sigma$ |

En tots tres casos els valors són representatius d'un espai amb dos graus de llibertat, i ho fem així perquè tot i que en l'anàlisi posterior tindrem cinc paràmetres, farem totes les representacions en dues dimensions i, per tant, agafant els graus de llibertat de dos en dos. A més, no tots els paràmetres ens interessen per a l'estudi des del punt de vista cosmològic, i els no rellevants seran marginalitzats de manera que de bon principi ja es reduirà el número de graus de llibertat.

### 6.1.2 Marginalització de paràmetres

Acabem de veure que en el nostre cas tenim una funció $\chi^2$, Eq. 6.1, que depèn de cinc paràmetres[1]: $\Omega_M$, $\Omega_\Lambda$, $\nu$, $\alpha$ i $\mathcal{M}$, però els que ens interessen són únicament els paràmetres cosmològics $\Omega_M$ i $\Omega_\Lambda$ i el paràmetre del model en qüestió, per exemple $\nu$. $\alpha$ i $\mathcal{M}$ són importants per a descriure la física de les SNe, però un cop han estat calibrades com a candeles estàndard, aquests paràmetres, iguals per qualsevol SN, no juguen cap paper en la dinàmica de l'Univers. Arribats a aquest punt hi ha diverses opcions, una és determinar els cinc paràmetres (amb o sense informació *a priori* pels paràmetres que no ens interessen -veure secció 6.1.3-) i una altra buscar la probabilitat marginal dels paràmetres cosmològics. Centrem-nos aquí en el segon cas, ja que amb marginalitzacions analítiques es disminuirà enormement el temps de càlcul.

[1] A [60] es considera el *redshift* com un sisè paràmetre desconegut a priori. Marginalitzant sobre ell s'aconsegueix un mètode per a determinar distàncies (i paràmetres cosmològics) independentment de $z$. Tot i la seva utilitat en experiments a alt $z$ on aquest és difícil de determinar, en el nostre cas s'utilitzaran conjunts de dades on $z$ s'ha determinat espectroscòpicament. En aquest cas, no cal augmentar la dispersió (tot i que mínimament segons els autors) innecessàriament.

La probabilitat marginal per a un paràmetre és aquella que s'obté independentment dels valors que prenguin els altres paràmetres. Per variables contínues això vol dir integrar per qualsevol dels valors que puguin prendre:

$$P(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 f(x_1, x_2)\,. \tag{6.2}$$

La marginalització, però, es realitza sobre les probabilitats i nosaltres el que coneixem és el $\chi^2$. Cal tenir en compte, doncs, que la probabilitat per una distribució $\chi^2$ ve donada per

$$P = \exp\,(-\frac{1}{2}\chi^2) \Longleftrightarrow \chi^2 = -2\ln P\,. \tag{6.3}$$

La integral de la probabilitat així definida en un cas similar al nostre ha estat calculada analíticament a [4]. Primer es converteix el $\chi^2(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \alpha, \mathcal{M})$ a probabilitat $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \alpha, \mathcal{M})$ i es tria la variable $\mathcal{M}$ per marginalitzar. Ara amb la probabilitat $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \alpha)$ es marginalitza sobre $\alpha$ per acabar obtenint únicament una probabilitat depenent dels paràmetres cosmològics. Finalment es torna al $\chi^2(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ perquè és la funció que volem mínima. L'única diferència entre aquest esquema i el necessari per la funció 6.1 és la inclusió d'un nou paràmetre $\nu$. Com que aquest paràmetre és important per al nostre estudi no haurà de ser marginalitzat i els resultats coincideixen amb el cas comentat. Les expressions concretes per un conjunt d'$n$ dades obtingudes després de seguir aquests passos són les següents:

$$\begin{aligned}
\chi^2_{\alpha-\mathrm{int}}(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu) &= -2\ln\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{\mathcal{M}-\mathrm{int}}(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \alpha)\right)\right] \\
&= A - \frac{B^2}{C} - \frac{\left(F - \frac{BE}{C}\right)^2}{D - \frac{E^2}{C}}, \qquad (6.4) \\
A &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(5\log_{10}\left[d_L(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, z_i)\right] - m_i\right)^2}{\sigma_i^2}, \\
B &= \sum_{i=1}^{n} \frac{5\log_{10}\left[d_L(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, z_i)\right] - m_i}{\sigma_i^2}, \\
C &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}, \\
D &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - s_i)^2}{\sigma_i^2}, \\
E &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - s_i)}{\sigma_i^2},
\end{aligned}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{(5\log_{10}[d_L(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, z_i)] - m_i)(1-s_i)}{\sigma_i^2},$$

on $\chi^2_{\mathcal{M}-\mathrm{int}}(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \alpha)$ està definit per:

$$\chi^2_{\mathcal{M}-\mathrm{int}}(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \alpha) = -2\ln\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M} \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \nu, \mathcal{M}, \alpha)\right)\right]. \quad (6.5)$$

Com a últim punt cal notar que si en comptes d'haver buscat la probabilitat marginal haguéssim determinat els cinc paràmetres, per conèixer la probabilitat d'un d'ells individualment s'hauria de "projectar" sobre l'espai de cada un, i acabaríem integrant igualment però de forma numèrica i després d'uns quants càlculs.

### 6.1.3 Anàlisi bayesià

Les SNe Ia no són les úniques eines utilitzades per a determinar paràmetres cosmològics. Mitjançant altres mètodes s'aconsegueixen resultats complementaris, i és profitós poder combinar resultats, o com a mínim informació, de tots els mètodes. Per a això serà útil una interpretació bayesiana de la probabilitat.

En l'aproximació bayesiana es pot determinar la funció de densitat de probabilitat per als paràmetres cosmològics $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ i paràmetres del model ($\vec{\theta}$ en general), condicional a les dades ($\vec{D}$). Sabem del teorema de Bayes que aquesta quantitat, $p(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \vec{\theta}|\vec{D})$, s'obté de la probabilitat de les dades donat un model i de la informació *a priori* tant dels paràmetres com de les dades:

$$p(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \vec{\theta}|\vec{D}) = \frac{p(\vec{D}|\Omega_M, \Omega_\Lambda, \vec{\theta})\; p(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \vec{\theta})}{p(\vec{D})}. \quad (6.6)$$

En el nostre cas les dades que s'obtenen de les SNe Ia són magnituds efectives al màxim de la corba de llum ($m^{eff}$ de l'equació 6.11) i, per tant, en aquest anàlisi $\vec{\theta} = (\mathcal{M}, \alpha, \nu)$.

Assumim ara que les diferents $m_i^{eff}$ són independents per cada SN, i que la probabilitat en cada cas segueix una distribució gaussiana. Llavors la densitat de probabilitat de les dades donat un model és un producte de gaussianes i conseqüentment l'exponent és proporcional a la suma que s'ha definit com $\chi^2$ a l'equació 6.1,

$$p(m_i^{eff}|\Omega_M, \Omega_\Lambda, \vec{\theta}) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(m_i^{th} - m_i^{eff})^2}{\sigma_i^2}\right) \propto \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right). \quad (6.7)$$

Tal i com s'ha comentat a l'apartat anterior, se seguiran els resultats de [4] per a la marginalització de $\mathcal{M}$ i $\alpha$, així $\vec{\theta}$ queda reduït únicament al paràmetre representatiu de la funció $\beta$. Com que en l'anàlisi posterior ens concentrarem bàsicament en un univers pla només introduirem informació *a priori* (gaussiana) a $\Omega_M$. Utilitzant que $p(m_i^{eff})$ és també constant s'obté:

$$p(\Omega_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\Omega_M}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\Omega_M - \Omega_M^0)^2}{\sigma_{\Omega_M}^2}\right) , \tag{6.8}$$

$$p(\Omega_M, \Omega_\Lambda, \beta_\Lambda | m_i^{eff}) = \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\Omega_M - \Omega_M^0)^2}{\sigma_{\Omega_M}^2}\right) , \tag{6.9}$$

on N és la normalització donada per:

$$N = \int_0^\infty d\Omega_M \int_{-\infty}^\infty d\Omega_\Lambda \int_{-\infty}^\infty d\beta_\Lambda \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\Omega_M - \Omega_M^0)^2}{\sigma_{\Omega_M}^2}\right) . \tag{6.10}$$

## 6.2 Estat actual

Els diferents models comentats a la secció 4.3 produeixen una lleugera desviació en la distància lluminositat respecte a aquella que s'obtindria per un univers amb CC constant. Aquesta variació repercuteix en la magnitud de les SNe Ia, però les diferències entre un model i un altre són petites (Fig. 6.1) amb comparació amb les que es produeixen, per exemple, quan es compara un model amb CC i un només amb matèria. Això passa perquè el que estem fent és mirar variacions entre models ja tots basats en l'existència de la CC.

Les dades actuals de SNe Ia són suficients per distingir models amb o sense energia fosca, però variacions dintre d'aquests com ara diferents tipus de models de quinta essència o de *running* de la CC són de moment indistingibles. El grau de coneixement millora considerablement si s'afegeix informació *a priori* provinent d'altres experiments com ara suposar un univers pla tal i com semblen indicar les fluctuacions del CMB, o restringir la densitat de matèria a valors propers als que es determinen per la dinàmica dels cúmuls, per exemple.

### 6.2.1 Dades actuals

En el moment de realitzar l'article que ha donat lloc a aquest treball [61], les dades comunament utilitzades no eren les mateixes que a la data de presentació d'aquest (setembre 2004). Actualment existeix una mostra de 156 SNe Ia totes calibrades de la mateixa manera i amb un alt grau de confiança amb la classificació com a SNe Ia, és el que els mateixos autors de la calibració anomenen el *gold set* [62]. De totes

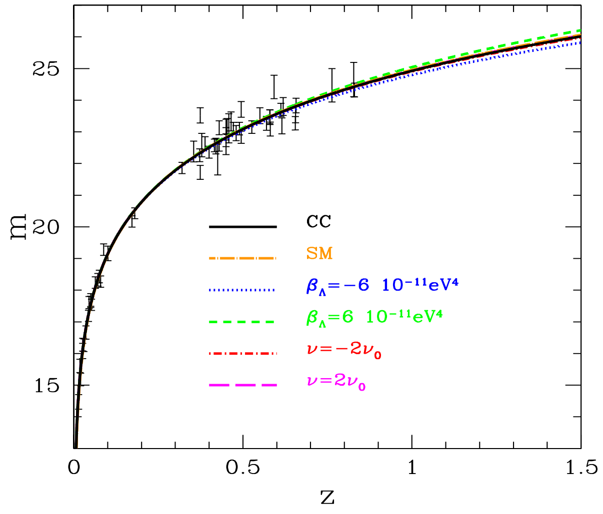


FIG. 6.1 – La relació entre la magnitud i el *redshift* és similar per als diferents models comentats a la secció 4.3. CC es refereix al cas de constant cosmològica constant, SM es correspon amb l'*Escenari 2*, les $\beta_\Lambda$ són diferents signes de l'*Escenari 1* i finalment les $\nu$ són diferents valors que pren el paràmetre de l'*Escenari 3*.

maneres la utilització d'una o altra col·lecció de dades no altera les conclusions si bé pot disminuir una mica la mida de les regions de confiança. És per això que es mantindrà el conjunt de 54 SNe Ia utilitzades originalment.

Aquest conjunt correspon a les dades del Supernova Cosmology Project (SCP). Consta de 16 SNe Ia de baix *redshift* de l'estudi del Calán/Tololo i de les 38 SNe Ia d'alt *redshift* utilitzades a l'ajust principal de [2]. El SCP calibra les seves dades a partir de l'*strech factor* (veure secció 2.2.2) i les corregeix de diversos factors observacionals, així, la magnitud en el màxim de lluminositat es determina segons

$$m_B^{eff} = m_X^{pic} + \alpha(s-1) - K_{BX} - A_X \equiv m^{eff} + \alpha(s-1)\,, \tag{6.11}$$

on $\alpha$ i $s$ s'han definit a la secció 2.2.2, $X$ és la banda observada, $K_{BX}$ és la *correcció-K* deguda al canvi de banda de l'emissió $(B)$ a la de la recepció $(X)$, i per últim $A_X$ és l'extinció galàctica.

### 6.2.2 Resultats

En aquesta secció els nivells de confiança que envolten el millor ajust (mínim de $\chi^2$) són contorns de $\chi^2$ constant que representen uns nivells de confiança de $1\sigma$, $2\sigma$ i $3\sigma$ respectivament.

Abans de començar amb els diferents models podem fer un primer test per veure si en general una evolució de la CC és compatible amb les dades actuals de SNe Ia.

Amb aquest objectiu, fem un desenvolupament de Taylor a primer ordre en $z$ de $\Lambda(z)$ i obtenim una expressió per al paràmetre de Hubble:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda^0 + \frac{1}{\rho_c^0} \left.\frac{d\Lambda}{dz}\right|_{z=0} z + \Omega_K^0 (1+z)^2 \right] . \qquad (6.12)$$

A la figura 6.2 es mostren a l'espai $(\Omega_\Lambda^0, (1/\rho_c^0) d\Lambda/dz\,|_{z=0})$ els resultats obtinguts després de calcular el $\chi^2$ quan el paràmetre de Hubble ve descrit per l'equació 6.12 en un univers pla ($\Omega_K^0 = 0$). A primer cop d'ull es veu que les dades són perfectament compatibles amb una evolució de la CC. D'alguna manera és equivalent al que passa en els models de quinta essència, on les dades també són compatibles amb una evolució lenta d'un camp escalar. La diferència és que aquí s'estan mirant evolucions d'una component d'energia que no veu alterada la seva equació d'estat. Si ens restringim a una CC constant ($d\Lambda/dz = 0$) es recuperen resultats similars als estàndard, és a dir, $\Omega_M^0 \sim 0{,}3 \pm 0{,}1$, $\Omega_\Lambda^0 \sim 0{,}7 \pm 0{,}1$, i en el mínim de $\chi^2$ es troba $\Omega_M^0 = 0{,}29$, $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}71$. En general, però, s'observa a la figura 6.2 que aquests valors comunament acceptats poden variar ostensiblement quan es considera el *running* de la CC.

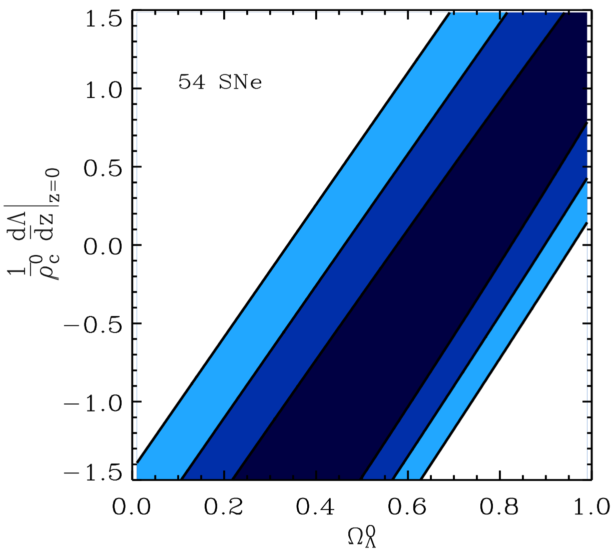


FIG. 6.2 – Regió de confiança per la densitat actual de CC i la seva variació amb el *redshift* en un univers pla. Del més fosc al més clar es mostra $1\sigma$, $2\sigma$ i $3\sigma$ respectivament. Deixar evolucionar la CC permet ampliar el rang de valors possibles de $\Omega_\Lambda^0$.

Després d'aquesta consideració general que mostra compatible el *running* de la CC amb les observacions podem aplicar el test $\chi^2$ als diferents escenaris de la secció 4.3. Ho farem marginalitzant sobre $\mathcal{M}$ i $\alpha$ de manera que després de considerar un univers pla el nostre espai de paràmetres es reduirà a $\Omega_\Lambda^0$ i al paràmetre que aparegui a la funció $\beta$ de cada escenari.

A l'*Escenari 1* el paràmetre utilitzat és la funció $\beta_\Lambda$ completa. Aquesta tria permetrà considerar independentment el cas on només hi contribueixen els neutrins lleugers i el cas on se suposa l'existència d'un altre camp escalar lleuger. Així doncs a la figura 6.3-(a) es representa aquest escenari amb el paràmetre $\beta_\Lambda$. El mínim de $\chi^2$ es dóna

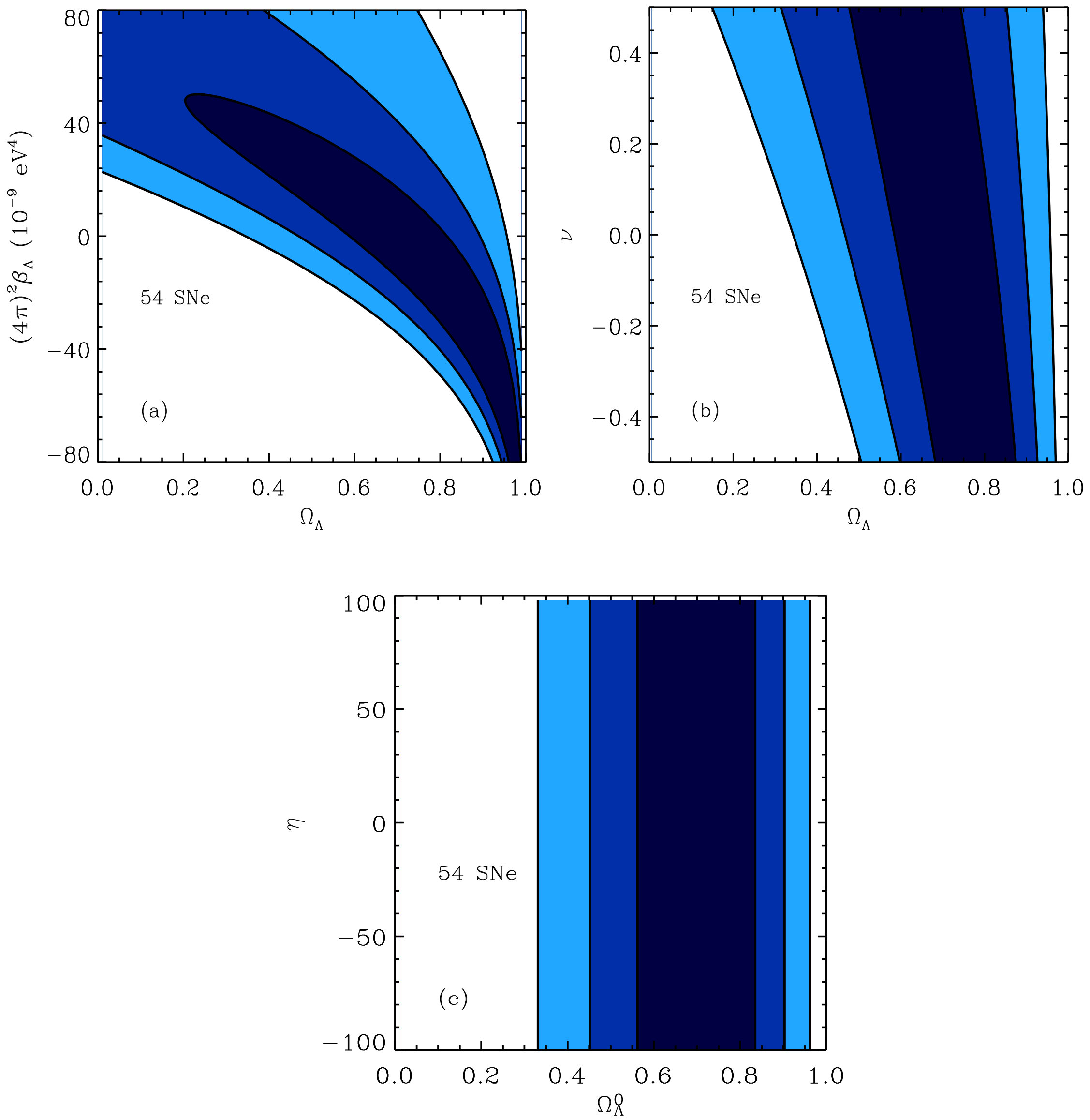


FIG. 6.3 – Regions de confiança per als diferents paràmetres que apareixen en la funció $\beta$ de cada un dels tres escenaris comentats a la secció 4.3. Les figures (a), (b) i (c) corresponen a l'*Escenari 1, 3* i *2* respectivament. Tonalitats com a la figura 6.2.

per $\beta_\Lambda < 0$ i això sembla indicar que les observacions afavoreixen l'absència d'aquest camp escalar, o com a mínim que, en cas d'existir, la seva massa hauria de ser de l'ordre o inferior a la dels neutrins. A mida que es consideren nivells de confiança més alts ($2\sigma$ i $3\sigma$), la zona positiva de $\beta_\Lambda$ es privilegia. Per mirar resultats concrets prenem el mínim de $\chi^2$: $\beta_\Lambda^{min} = -0{,}3\,10^{-9}\,eV$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}9$ amb $\chi^2_{min} = 54$. Això representa una massa per als neutrins lleugers de $m_\nu = 0{,}009\,eV$, però el fet que es doni per $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}9$, és a dir, $\Omega_M^0 = 0{,}1$, fa que en combinar-se amb imposicions *a priori* sobre la densitat de matèria ($\Omega_M^0$) $m_\nu$ tendeixi a disminuir.

A la segona gràfica de la mateixa figura, Fig. 6.3-(b), es representa l'*Escenari 3*. Una ampliació de l'eix del paràmetre $\nu$ portaria a una figura similar a la 6.3-(a) (degut a la relació 4.26 entre les escales de renormalització, i la conseqüent similitud entre les funcions $\beta$ dels dos escenaris), però les restriccions trobades sobre $\nu$ (secció 5.1.2) fan que només es mostri el que seria un petit fragment a l'*Escenari 1*. D'aquesta manera les 54 SNe no acoten el valor del paràmetre $\nu$, i determinen $0{,}5 \leq \Omega_\Lambda^0 \leq 0{,}9$ al nivell d'$1\sigma$.

Finalment també es mostra l'*Escenari 2* (Fig. 6.3-(c)). El paràmetre $\eta$ definit a l'equació 4.18 està fixat per al model estàndard de partícules ($\eta = 10{,}75$), però ampliacions d'aquest model representarien canvis sobre $\eta$. Si es considera un paràmetre lliure, la CC està completament degenerada en $\eta$ i no se'n pot extreure cap informació. Curiosament el fet de no marginalitzar sobre $\mathcal{M}$ i fixar-lo a $\mathcal{M} = -3{,}4$ trenca completament aquesta degeneració, i la regió de confiança en l'espai ($\eta$, $\Omega_\Lambda^0$) descriu una el·lipse centrada a ($\eta = 12$, $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$), és a dir, completament d'acord tant amb el model estàndard de partícules com el de cosmologia (Fig. 6.4(a)). El fet de no marginalitzar sobre $\mathcal{M}$ no acostuma a variar apreciablement els resultats obtinguts amb la marginalització, i a més, evita resultats erronis en cas que el valor al qual s'hagi fixat el paràmetre en qüestió no sigui correcte. La figura 6.4(b) mostra els resultats per a l'*Escenari 3* també amb $\mathcal{M} = -3{,}4$, i en aquest cas el canvi en la regió de confiança és mínim.

Tot i aquestes millores en no marginalitzar sobre $\mathcal{M}$, com que en totes aquestes gràfiques s'han estat utilitzant únicament 54 SNe, les regions de confiança són extremandament grans i ni tan sols al nivell de $1\sigma$ es redueix la incertesa de la funció $\beta$ de manera raonable. Sembla necessari doncs, obtenir un nombre més gran de SNe Ia per ajustar els models. En la següent secció es mirarà quines són les perspectives de futur al respecte i quins resultats s'esperen obtenir.

## 6.3 SNAP i altres experiments futurs

Quan es va descobrir que l'Univers estava en expansió accelerada a partir de les dades de SNe Ia [1,2], es van proposar diversos experiments tant per millorar el nostre coneixement d'aquests fenòmens com per obtenir noves dades a alt *redshift*. Entre ells

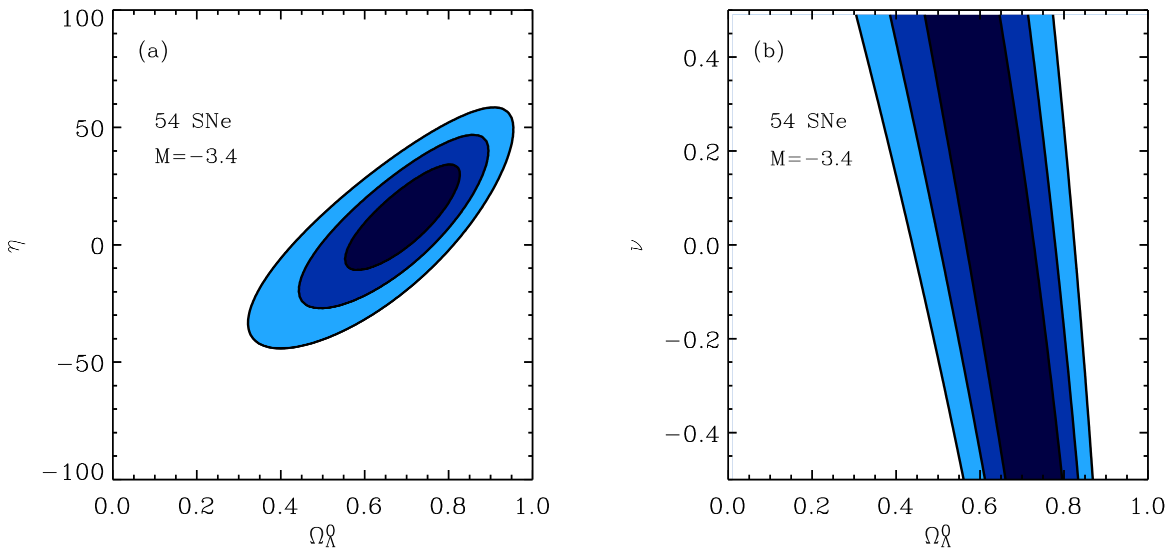


FIG. 6.4 – (a) Regió de confiança per al paràmetre $\eta$ de l'*Escenari 2* fixant $\mathcal{M} = -3.4$ i per tant sense fer la marginalització. Tonalitats com a la figura 6.2. (b) Igual com (a) però per al paràmetre $\nu$ de l'*Escenari 3*.

cal destacar *The SuperNova/Acceleration Probe* (SNAP). Es tracta d'un satèl·lit que obtindrà espectres i fotometria d'unes dues mil supernoves per any durant un període de tres anys. Aquest satèl·lit encara no està en funcionament, però altres grups ja estan aconseguint resultats interessants a menor escala. L'equip de GOODS [63], per exemple, observa supernoves llunyanes amb el *Hubble Space Telescope*, mentre que per tal d'entendre la calibració de les SNe Ia *The Nearby Supernova Factory* (SNfactory) n'està obtenint un gran número a baix *redshift* [64].

Tot i que encara no es disposa d'aquest gran número de dades, és útil veure fins a quin punt milloraran el nostre coneixement actual. Alguns models teòrics no seran contrastables ni amb aquesta millora de la qualitat i del nombre de dades, d'altres podran ser ja descartats. A continuació veurem com es poden simular aquestes dades i en quina situació quedaran els models de CC no constant.

### 6.3.1 Distribucions i simulació de dades

A l'hora de generar un conjunt de dades amb les especificacions d'SNAP, es considerarà la distribució de SNe Ia que s'espera observar [55] i que es mostra a la taula 6.2.Suposem que en cada un dels quatre intervals de *redshift* indicats, les SNe estan equiespaiades. Dividim en *bins* d'amplada 0,01 en *redshift* i calculem el número de supernoves que hi toquen segons la distribució de la taula.

TAULA 6.2 – Distribució de dades amb les especificacions del projecte SNAP.

| redshift | $0 < z < 0{,}2$ | $0{,}2 < z < 1{,}2$ | $1{,}2 < z < 1{,}4$ | $1{,}4 < z < 1{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| # SNe | 50 | 1800 | 50 | 15 |

Així a cada un dels *redshifts* es calcula la magnitud corresponent donada una cosmologia en particular, és a dir, donat un conjunt de valors ($\Omega_M$, $\Omega_\Lambda$, $\nu$ -o equivalent-). Tant degut a la dispersió intrínseca de les SNe Ia com als errors sistemàtics que apareixen en les observacions, aquesta magnitud no es correspondrà amb la que s'obtindrà, així que introduirem una incertesa aleatòria que simuli les variacions reals sobre el valor teòric.

La incertesa intrínseca de les SNe Ia un cop calibrades amb els mètodes actuals és de $\sigma_{intr} \sim 0{,}15$. Per altra banda, la incertesa deguda als errors sistemàtics és força més baixa, ja que les mesures es faran des de l'espai. A [65] per exemple, es mostra com els sistemàtics depenen del *redshift* segons

$$\sigma_{sis} = z\frac{0{,}02}{1{,}5}\,. \tag{6.13}$$

Per a obtenir les incerteses aleatòries es generaran variables aleatòries gaussianes dintre de l'interval donat per la incertesa intrínseca:

$$m^{obs} = m^{teo} + \delta_m \tag{6.14}$$

amb

$$-n\sigma_{intr} < \delta_m < n\sigma_{intr} \tag{6.15}$$

on $n$ és el número de desviacions estàndard fins on permetrem que les dades s'allunyin del valor teòric.

Un cop s'obtingui un conjunt de dades com el que preveu l'equip d'SNAP, tindrem grups de 20 SNe a cada *bin* d'amplada 0,01 fins i tot a alt *redshift*. Això suposarà que a cada punt la magnitud tindrà només una incertesa de l'ordre de 0,03 magnituds, sempre i quan $\sigma_{intr} \sim 0{,}15$. Tenint en compte aquesta qualitat, podem mirar fins on caldrà estendre les dades per a determinar els paràmetres que apareixen a la funció $\beta$ en els models amb evolució de la CC.

Agafem un d'aquests *bins* a un *redshift* relativament baix, $z_1 = 0{,}5$ per exemple, i un altre a un *redshift* superior ($z_2 = 1$ o $1{,}5$). Cada magnitud determina una línia a l'espai ($\Omega_M$, $\Omega_\Lambda$) corresponent als valors dels paràmetres compatibles amb la magnitud observada a aquell *redshift*. Com que a un *redshift* la magnitud té una incertesa (0,03 per als *bins* que hem construït) les línies són realment bandes i delimiten una regió de paràmetres “permesos”. Si ho fem per als dos *bins*, les bandes es creuen, i la intersecció representa com la dispersió intrínseca en la magnitud de les supernoves es trasllada als paràmetres [66]:

$$(\Delta\Omega_\Lambda \times \Delta\Omega_M) \propto (\sigma_m^{z_1} \times \sigma_m^{z_2})\,. \tag{6.16}$$

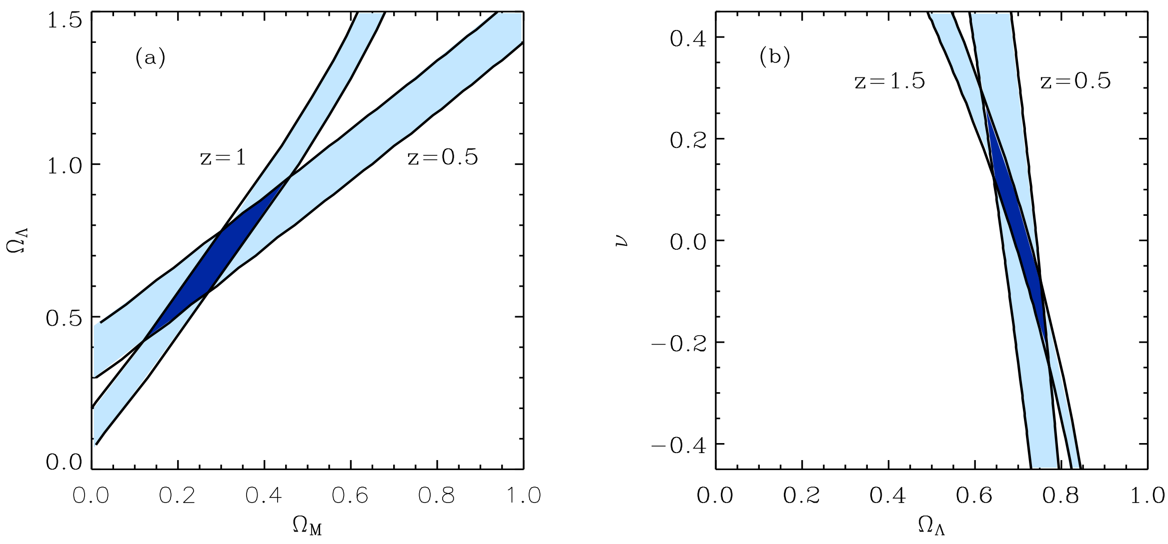


FIG. 6.5 – Bandes de magnitud constant a l’espai de paràmetres per una cosmologia $\Omega_M^0 = 0{,}3, \Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i $\nu = 2\nu_0$. Es necessiten dades a un *redshift* molt més gran per acotar el valor de $\nu$ que no pas el dels paràmetres cosmològics.

A la figura 6.5 es mostren els resultats quan es considera que la CC evoluciona amb el *redshift* segons l’*Escenari 3*. El model cosmològic utilitzat és $\Omega_M^0 = 0{,}3, \Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i $\nu = 2\nu_0$. Al panell esquerre, les bandes estan dibuixades a l’espai habitual de paràmetres cosmològics, i la seva intersecció és similar a la del model estàndard amb $\Omega_M^0 = 0{,}3, \Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i $\nu = 0$ (figura 2 de [66]). Així, en els dos tipus de models els paràmetres cosmològics es determinen amb la mateixa precisió. En canvi, per acotar el valor de $\nu$, cal que les SNe estiguin més separades en el *redshift*. La raó és que els models de CC constant tenen la màxima diferència a $z \sim 0{,}8$ (aquest és el valor que s’obté de la diferència màxima entre un univers amb $\Omega_M^0 = 0{,}3, \Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$ i un amb $\Omega_M^0 = 0{,}2, \Omega_\Lambda^0 = 0$), mentre que els de *running* de la CC difereixen dels de sense *running* a *redshifts* més alts ($z > 1$), i aquesta diferència creix amb el *redshift*. Com es desprèn de la figura 6.6 en aquest cas es necessita una gran concentració de SNe Ia als *redshifts* més alts als quals arribarà SNAP, mentre que tenir un grup considerable de dades al voltant de $z = 1$ és suficient per distingir models amb i sense CC.

El mateix que s’ha fet amb la distribució proposada per l’equip d’SNAP, es pot

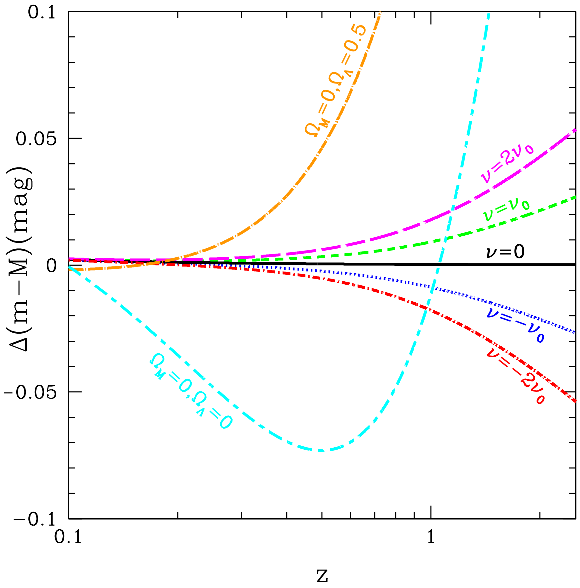


FIG. 6.6 – Desviacions del mòdul de distància $m - M$ respecte al cas de CC constant amb $\Omega_M^0 = 0{,}3, \Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. Mentre que els models de CC constant tenen la màxima diferència a *redshifts* intermitjos, cal anar a $z < 1$ per observar el *running* de la CC.

fer per diferents distribucions. Com que acabem de veure que els models de CC variable es distingeixen entre ells bàsicament a alt *redshift*, mirarem dues distribucions alternatives amb una major concentració de dades en aquestes zones. La primera, *Distribució 1*, és bastant similar a la d'SNAP, però el gruix de les dades estan distribuïdes homogèniament fins a $z = 1{,}7$ en comptes de fins a $z = 1{,}4$. La *Distribució 2* encara mostra un augment major de dades a distàncies grans, de manera que entre $1 < z < 2$ hi ha 1750 SNe. Aquest número de dades no és gratuït, sinó que el creixent nombre d'estudis dedicats a les SNe Ia justifica aquestes distribucions.

TAULA 6.3 – Distribucions de dades a alt *redshift*.

| | Interval $z$ | # SNe |
|---|---|---|
| Distr.1 | $0 < z < 0{,}2$ | 50 |
| | $0{,}2 < z < 1{,}7$ | 2000 |
| Distr.2 | $0 < z < 1$ | 250 |
| | $1 < z < 2$ | 1750 |

### 6.3.2 Resultats

Utilitzem ara les distribucions de dades generades a l'apartat anterior per analitzar els escenaris de la secció 4.3. Tal i com hem fet amb les dades actuals, considerem primer la característica distintiva d'aquest tipus de models, és a dir, una $d\Lambda/dz$ diferent de zero.

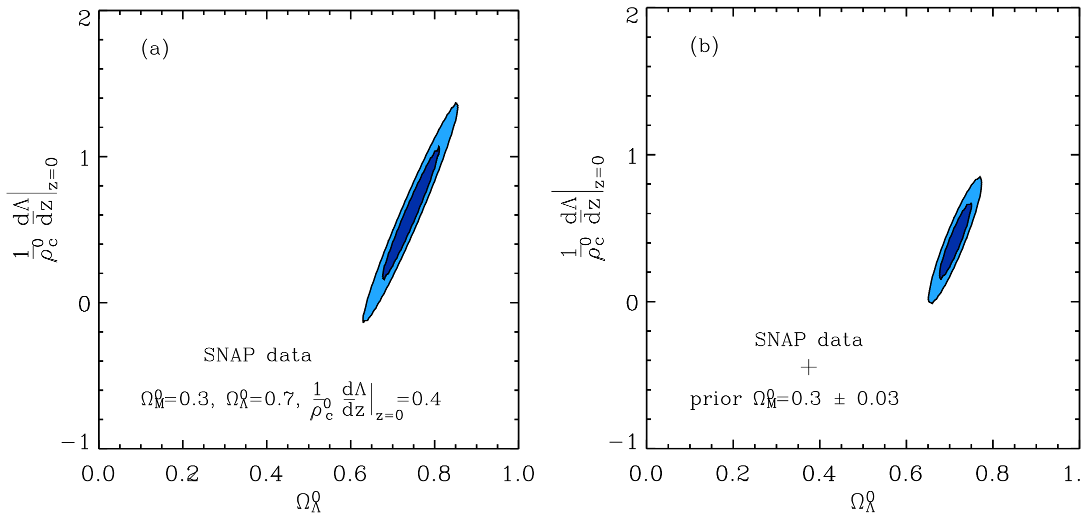


FIG. 6.7 – Regions de confiança en l'espai $(\Omega_\Lambda^0, (1/\rho_c^0)d\Lambda/dz\,|_{z=0})$ per a un univers pla. La figura (a) ha estat obtinguda sense cap restricció en la densitat de matèria, mentre que a la (b) s'imposa un *prior* sobre $\Omega_M^0$. Les dades corresponen a una distribució del tipus SNAP.

És fàcil veure l'ordre de magnitud d'aquest factor en el model més desenvolupat d'aquest treball, l'*Escenari 3*, ja que es pot llegir directament de la figura 5.4-(b), o bé, sabem que a l'època actual $(1/\rho_c^0)\,d\Lambda/dz = 3\nu\Omega_M^0$. Per $\nu = 2\nu_0$ això vol dir una derivada de l'ordre de 0,05. Tot i que a l'entorn de $z = 0$ el seu valor és petit, el desenvolupament de Taylor de l'equació 6.12 no és vàlid en aquest cas, perquè la derivada no és constant i caldria anar a ordres superiors en el desenvolupament. De totes maneres els altres escenaris experimenten una variació menor del pendent en l'evolució de la CC (Fig. 4.1), i per models del seu estil el desenvolupament sí seria correcte. Com que el que volem mirar és l'efecte genèric que causa el *running* simularem un conjunt de dades amb $(1/\rho_c^0)\,d\Lambda/dz = 0{,}4$; els paràmetres cosmològics utilitzats seran els habituals, $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$.

La figura 6.7 mostra quin és el resultat que obtindríem si l'Univers fos realment com el que ens ha servit per generar el conjunt de dades, i SNAP hagués mesurat les dades simulades. Cal dir que la col·lecció de magnituds simulades és només una de les possibles i, per tant, no estem obtenint la distribució de dades més probable donat el model cosmològic, simplement una d'elles. Per tenir aquesta distribució

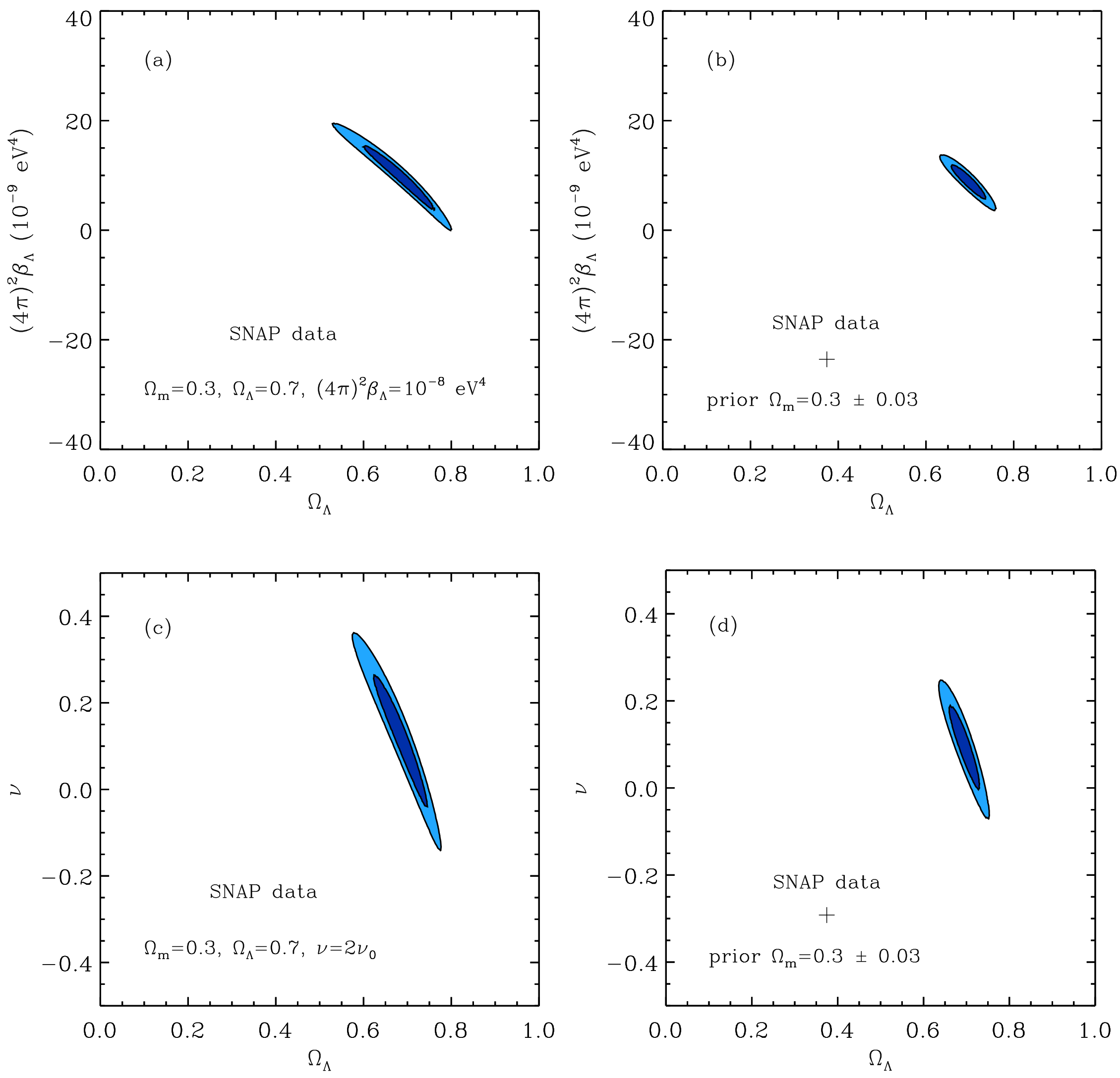


FIG. 6.8 – Regions de confiança per a l'*Escenari 1* (a dalt) i *3* (a baix). A les figures de l'esquerra s'assumeix un univers pla per fer l'ajust mentre que a les de la dreta s'afegeix el *prior* sobre $\Omega_M^0$ de $\Omega_M^0 = 0{,}30 \pm 0{,}03$.

més probable caldria generar un nombre elevat de distribucions, veure com estan distribuïdes i calcular-ne la mitjana (en cas que la distribució de distribucions fos gaussiana). Així s'aconseguiria l'error mínim en els paràmetres, però ningú ens pot assegurar que observarem el "millor" conjunt de dades...

De tota manera si tornem a la figura veiem que si assumim un univers pla en l'ajust, ja es pot descartar la CC constant a $1\sigma$, i si a més afegim un *prior* sobre la densitat de matèria ($\Omega_M^0 = 0{,}30 \pm 0{,}03$) la variació de $\Lambda$ quedaria determinada amb un error de $\pm 0{,}2$, cosa que permetria distingir entre models.

Considerem ara els paràmetres que apareixen a la funció $\beta$ dels tres escenaris

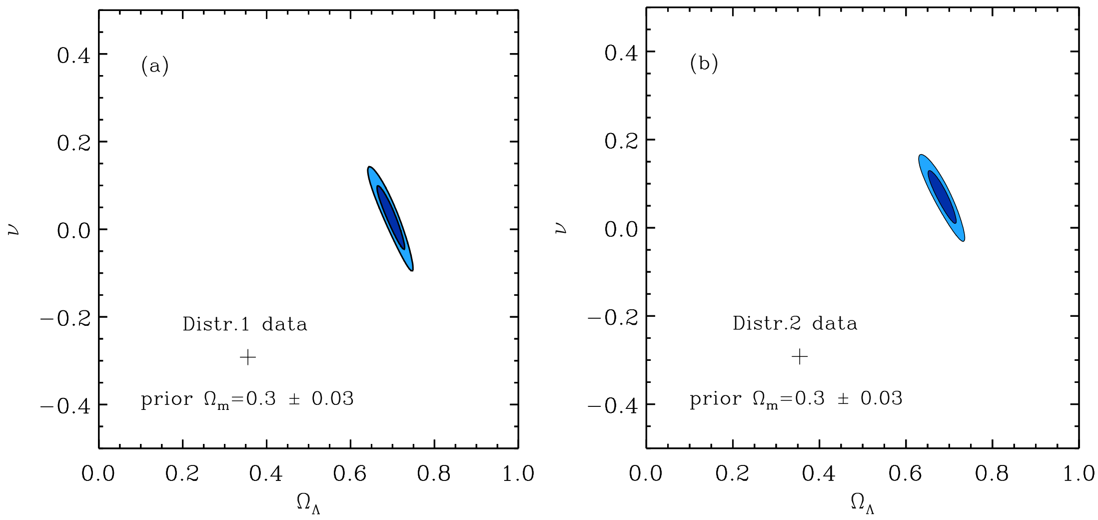


FIG. 6.9 – Regions de confiança obtingudes per a l'*Escenari 3* amb dades simulades segons les distribucions 1 i 2. En tots dos casos se suposa un univers pla i s'afegeix el *prior* sobre $\Omega_M$ de $\Omega_M^0 = 0{,}30 \pm 0{,}03$.

obtinguts de considerar els efectes quàntics del buit. L'*Escenari 2* quedarà fora de l'anàlisi perque l'únic paràmetre, $\eta$, està completament determinat pel model estàndard de partícules. Per a l'*Escenari 1* i *3*, en canvi, utilitzem els mateixos paràmetres que a l'apartat de dades actuals. En el primer cas agafem com a llavor una massa dels neutrins de l'ordre de $0{,}006\, eV$ i generem les dades per $\beta_\Lambda = 10^{-8}/(4\pi)^2$, $\Omega_M^0 = 0{,}3$ i $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$, suposant que no existeix cap camp escalar extra. El resultat és que la funció $\beta$ queda determinada amb una precisió de $4\, 10^{-9}\, eV$. Si s'afegeix el *prior* sobre $\Omega_M$ de $\Omega_M^0 = 0{,}30 \pm 0{,}03$, la precisió millora en un 50%, i això fa que, amb un nivell de confiança d'$1\sigma$, aquest escenari sigui distingible d'un de CC constant. Els resultats són similars a l'*Escenari 3*. La llavor per la generació de dades és en aquest cas $\nu = 0{,}1$, i com passa a l'escenari anterior cal afegir el *prior* sobre la densitat de matèria per tal de distingir l'escenari del d'una CC independent del *redshift*. Si provem en aquest cas les distribucions alternatives de dades a alt *redshift* veiem que per poder acotar realment el valor del paràmetre que descriu l'evolució de la CC, cal que la major part de les dades es concentrin a $z > 1$ on esperem observar les diferències. A la figura 6.9 es pot veure com és la *Distribució 2* la que millora ostensiblement els resultats. Tant aquests resultats com els anteriors estan quantificats a la taula 6.4.

Per tal de poder comparar com es contrasten aquests models de CC variable i els de quinta essència, s'han afegit a la taula els resultats per a la determinació de paràmetres de l'equació d'estat del model de Supergravetat de [65]. En el seu cas apareixen dos paràmetres independents, $w_0$ i $w_a$, per tal de descriure una equació d'estat que evoluciona seguint $w(z) = w_0 + w_a\, z/(z+1)$. En els models de CC variable tant $w_0$ com $w_a$ estan perfectament determinats (-1 i 0 respectivament), i el que evoluciona és la pròpia densitat de CC. El grau de determinació del paràmetre $\nu$, per exemple, està al mateix nivell que $w_a$, tal i com es pot veure comparant els resultats per tres anys de dades d'SNAP.

TAULA 6.4 – Determinació dels paràmetres que determinen l'evolució de la CC tant per les dades d'SNAP com per a distribucions alternatives de dades. En tots els casos l'ajust considera un univers pla i quan s'afegeix el *prior* sobre $\Omega_M$ el valor central és $\Omega_M^0 = 0{,}3$. Per comparació, també es mostra un cas de determinació de paràmetres de l'equació d'estat d'un model de quinta essència (el model de SUGRA de [65]).

| Distribució | Prior $\sigma_{\Omega_M}$ | $\theta$ | $\sigma_\theta$ |
|---|---|---|---|
| **SNAP** 1 any | Cap | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}10$ |
| **SNAP** 1 any | 0,03 | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}06$ |
| **SNAP** 3 anys | Cap | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}06$ |
| **SNAP** 3 anys | 0,03 | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}04$ |
| **Distr.1** | 0,03 | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}05$ |
| **Distr.2** | 0,03 | $\nu = 0{,}1$ | $\pm 0{,}02$ |
| **SNAP** | Cap | $\beta_\Lambda(10^{-9} eV^4) = 10$ | $\pm 4$ |
| **SNAP** | 0,03 | $\beta_\Lambda(10^{-9} eV^4) = 10$ | $\pm 2$ |
| **SNAP** 3 anys | 0,03 | $w_0 = -1$ | $\pm 0{,}02$ |
| **SNAP** 3 anys | | $w_a = 0{,}58$ | $\pm 0{,}25$ |

# Capítol 7

# Conclusions

En aquest treball s'ha desenvolupat la fenomenologia que presenta un univers amb constant cosmològica variable segons les equacions del grup de renormalització.

La principal diferència entre aquests models i els de quinta essència, on l'energia també evoluciona amb el temps, és la forma de l'equació d'estat. Tret d'aquesta diferència, i tot i que conceptualment els dos models no tenen res a veure, són comparables degut a què produeixen comportaments a l'època actual similars.

La constant cosmològica, com a paràmetre que apareix en l'acció d'una teoria quàntica de camps, experimenta una dependència amb l'escala, i aquesta és la que en dicta l'evolució al llarg de la història de l'Univers. Com hem vist, el paràmetre $w$ de l'equació d'estat es manté sempre constant, $p(t) = -\rho(t)$. Per altra banda, en els models de quinta essència cal introduir un camp escalar lleuger que compleixi certes propietats de manera que acualment es comporti com una constant cosmològica efectiva, però amb una equació d'estat que varia segons el potencial mantenint-se, això sí, sempre pròxima a la d'una veritable constant cosmològica. Aquest camp de característiques tan especials no ha estat observat. A més, tot i que s'introduís a l'acció de la teoria el terme corresponent al camp de quinta essència, la constant cosmològica seguiria sent necessària per a la renormalitzabilitat de la teoria. Així doncs, sembla lògic comprovar primer si la pròpia constant cosmològica pot ser la causant d'una possible component d'energia fosca depenent del temps abans d'introduir camps addicionals ad hoc.

Hem vist que encara no hi ha una manera única i completa de determinar com evoluciona la constant cosmològica. Primer perquè no es té una teoria quàntica de la gravetat i s'ha de partir d'una aproximació semiclàssica, on els camps se situen en un espai-temps corbat, la gravetat no es quantitza i es tracta com una pertorbació sobre un fons pla. I segon perquè tot i en aquesta aproximació, la forma de la funció $\beta$ no es pot calcular en tots els esquemes necessaris per tal d'obtenir una forma i interpretació inequívoca.

D'entre les possibilitats s'han destacat tres escenaris. Dos d'ells, l'*Escenari 1* i el *2* trien com escala de renormalització la densitat d'energia típica de l'Univers a cada instant. La diferència rau en els graus de llibertat actius a baixes energies, és a dir, a l'actualitat. Mentre que en el primer cas només hi contribueixen els més lleugers, el neutrí electrònic i l'estèril si existeix, en el segon són les partícules més pesants del model estàndard les causants de l'evolució. El grau de precisió en l'ajust dels paràmetres que necessita aquest segon escenari és tan gran com el que es realitza en models de quinta essència i no és, per tant, l'escenari més desitjable. L'*Escenari 3*, àmpliament analitzat, pren el paràmetre de Hubble com escala de renormalització. En aplicar el teorema d'Appelquist-Carazzone s'obté un descoblament suau que fa que siguin les partícules més massives, aquelles properes a l'escala de Planck, les causants del *running* fins i tot al temps actual. Aquest tipus de desacoblament és conseqüència de què, a diferència de la resta de paràmetres de la teoria, la constant cosmològica té dimensió d'energia a la quarta potència.

Tots aquests escenaris tenen característiques comunes interessants. Com que el tensor d'energia-moment que s'ha de conservar és suma de la matèria ordinària i d'una constant cosmològica amb dependència temporal, l'equació de conservació resultant permet un intercanvi d'energia entre ambdues. Això relaciona la densitat de matèria i de constant cosmològica a cada instant de temps, i explica perquè actualment observem que les dues components són del mateix ordre. A més, en determinades condicions, els tres escenaris descriuen una constant cosmològica que en el futur tendeix a zero o va cap a valors negatius. Això no hauria de ser cap imposició general, però teories com la Teoria-M i teories de cordes *ho necessiten* per a què en un futur desaparegui l'horitzó d'esdeveniments i es pugui definir la matriu $S$ sense problemes. Un altre "avantatge" és que tot i que no es resol directament el problema de la constant cosmològica, existeix la possibilitat que si aquesta es va produir amb el trencament espontani de simetria degut al camp de Higgs, hagi anat disminuint el seu valor des dels $10^8\,GeV^4$ fins als $10^{-47}\,GeV^4$ degut simplement a l'equació del grup de renormalització. Per últim, comentar que la pseudoequació d'estat definida a la manera d'una de quinta essència permet obtenir aparentment models fantasma tal i com semblen indicar les observacions. Per a això només cal una evolució negativa de la constant cosmològica cap al passat, ja que així sota els ulls d'un model de quinta essència ens semblaria observar una $w < -1$.

Tot i que després d'analitzar totes les seves característiques, aquest tipus de models pugui semblar més o menys atractiu, encara cal veure si és compatible amb les observacions o bé si aquestes el descarten directament. Per fer-ho s'han utilitzat les SNe Ia a alt *redshift*. Hem vist que, després d'una calibració adequada, aquests objectes es poden considerar candeles estàndard. Això ha permès comparar les magnituds observades d'un conjunt de 54 SNe Ia amb les que s'haurien de donar en un univers amb constant cosmològica depenent del temps segons els tres escenaris analitzats. En general, les dades són compatibles amb aquesta evolució de la mateixa manera que ho són amb l'energia que crea un camp de quinta essència. Evolucions importants allunyen el valor actual de la constant cosmològica del valor estàndard $\Omega_\Lambda^0 = 0{,}7$. Ara, com que l'energia fosca, per definició, és una energia que està distribuïda homogèniament per l'Univers, només es pot detectar pels seus efectes en la dinàmica d'aquest, i això no permet obtenir una mesura independent del seu valor. Ajustos concrets de cada model han permès determinar alguns dels seus paràmetres lliures. En el cas de l'*Escenari 1*, per exemple, s'ha pogut establir un valor per a la massa dels neutrins lleugers de $m_\nu \sim 0{,}01\, eV$. A l'*Escenari 2*, deixant lliures els paràmetres ja fixats pel model estàndard de partícules, s'han retrobat amb una precisió acceptable. Pel que fa a *Escenari 3*, s'ha vist que el seu paràmetre característic, l'índex cosmològic $\nu$, queda millor determinat per algunes consideracions físiques que l'acoten a $|\nu| \ll 1$, que no pas per aquestes 54 SNe Ia.

Per aquesta raó ha semblat necessari simular un nombre major de dades segons les especificacions del projecte SNAP i d'altres alternatius. D'aquesta manera s'ha pogut tenir en compte com seran les dades que es tindran en un futur no gaire llunyà tant en qualitat com en número. El resultats obtinguts permeten discriminar el tipus de model tractat aquí del d'un de constant cosmològica real a $1\sigma$ sempre que l'evolució sigui notable. Evolucions extremadament lentes són, lògicament, indistingibles d'una constant cosmològica quan les dades utilitzades "només" arriben a *redshift* 2. De totes maneres, una constant cosmològica que evoluciona degut als efectes del grup de renormalització està en la mateixa situació que un camp de quinta essència pel que fa al constrast amb les dades de SNe Ia. Cal tenir en compte, però, que per distingir els dos models caldrà fer els dos ajustos independentment i comprovar quin és el que dóna una millor qualitat. Els seus fonaments són tan diferents que un d'ells no es pot expressar com a cas particular de l'altre, a diferència del que es fa per una constant cosmològica real.

# Bibliografia


[1] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116 :1009–1038, September 1998.

[2] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 517 :565–586, June 1999.

[3] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485 :208–214, 2000.

[4] Cedric Deffayet, Susana J. Landau, Julien Raux, Matias Zaldarriaga, and Pierre Astier. Supernovae, CMB, and gravitational leakage into extra dimensions. *Phys. Rev.*, D66 :024019, 2002.

[5] Gilberto M. Kremer and Daniele S. M. Alves. Palatini approach to 1/R gravity and its implications to the late Universe. 2004.

[6] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Modified gravity with ln R terms and cosmic acceleration. 2003.

[7] Xin-He Meng and Peng Wang. Palatini formation of modified gravity with ln R terms. *Phys. Lett.*, B584 :1–7, 2004.

[8] A. Serna and J. M. Alimi. Scalar-Tensor Cosmological Models. *Phys. Rev.*, D53 :3074–3086, 1996.

[9] L. M. Diaz-Rivera and L. O. Pimentel. Cosmological models with dynamical Lambda in scalar-tensor theories. *Phys. Rev.*, D60 :123501, 1999.

[10] V. B. Bezerra, C. Romero, G. Grebot, M. E. X. Guimaraes, and L. P. Colatto. Remarks on some vacuum solutions of scalar-tensor cosmological models. 2003.

[11] Katherine Freese and Matthew Lewis. Cardassian Expansion: a Model in which the Universe is Flat, Matter Dominated, and Accelerating. *Phys. Lett.*, B540 :1–8, 2002.

[12] Paolo Gondolo and Katherine Freese. Fluid interpretation of Cardassian expansion. *Phys. Rev.*, D68 :063509, 2003.

[13] James M. Cline and Jeremie Vinet. Problems with time-varying extra dimensions or 'Cardassian expansion' as alternatives to dark energy. *Phys. Rev.*, D68 :025015, 2003.

[14] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. Cosmology with a time variable cosmological 'constant'. *Astrophys. J.*, 325 :L17, 1988.

[15] A. de la Macorra and G. Piccinelli. General scalar fields as quintessence. *Phys. Rev.*, D61 :123503, 2000.

[16] Claudio Rubano and Paolo Scudellaro. On some exponential potentials for a cosmological scalar field as quintessence. *Gen. Rel. Grav.*, 34 :307–328, 2002.

[17] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev.*, D63 :103510, 2001.

[18] Michael Malquarti, Edmund J. Copeland, and Andrew R. Liddle. K-essence and the coincidence problem. *Phys. Rev.*, D68 :023512, 2003.

[19] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An alternative to quintessence. *Phys. Lett.*, B511 :265–268, 2001.

[20] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier. The chaplygin gas as a model for dark energy. 2004.

[21] A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.*, page 142, 1917.

[22] D. N. Spergel et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, 148 :175, 2003.

[23] Will J. Percival et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: The power spectrum and the matter content of the universe. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 327 :1297, 2001.

[24] S. W. Allen, A. C. Fabian, R. W. Schmidt, and H. Ebeling. Cosmological constraints from the local x-ray luminosity function of the most x-ray luminous galaxy clusters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 342 :287, 2003.

[25] A. V. Filippenko. Optical Spectra of Supernovae. *ARA&A*, 35 :309–355, 1997.

[26] P. Nugent. *Tutorial d'espectroscopia de SNe Ia properes.* http ://panisse.lbl.gov/˜nugent.

[27] J. C. Wheeler, T. Piran, and S. Weinberg, editors. *Jerusalem Winter School for Theoretical Physics. Supernovae. Volume 6, Jerusalem, Dec. 28, 1988- Jan. 5, 1989.*, 1990.

[28] B. Leibundgut. Type Ia Supernovae. *A&A Rev.*, 10 :179–209, 2000.

[29] P. A. Pinto and R. G. Eastman. The Physics of Type Ia Supernova Light Curves. I. Analytic Results and Time Dependence. *ApJ*, 530 :744–756, February 2000.

[30] M. M. Phillips. The absolute magnitudes of Type Ia supernovae. *ApJL*, 413 :L105–L108, August 1993.

[31] M. Hamuy, M. M. Philips, J. Maza, N. B. Suntzeff, M. della Valle, J. Danziger, R. Antezana, M. Wischnjwesky, R. Aviles, R. A. Schommer, Y.-C. Kim, L. A. Wells, M. T. Ruiz, C. F. Prosser, W. Krzeminski, C. D. Baylin, P. Hartigan, and J. Hughes. SN 1992K: A twin to the subluminous Type Ia SN 1991bg. *AJ*, 108 :2226–2232, December 1994.

[32] M. Hamuy, M. M. Phillips, N. B. Suntzeff, R. A. Schommer, J. Maza, and R. Aviles. The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type Ia Supernovae. *AJ*, 112 :2391–+, December 1996.

[33] S. Perlmutter, S. Gabi, G. Goldhaber, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, R. Pain, C. R. Pennypacker, I. A. Small, R. S. Ellis, R. G. McMahon, B. J. Boyle, P. S. Bunclark, D. Carter, M. J. Irwin, K. Glazebrook, H. J. M. Newberg, A. V. Filippenko, T. Matheson, M. Dopita, W. J. Couch, and The Supernova Cosmology Project. Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First Seven Supernovae at Z $>$ 0.35. *ApJ*, 483 :565, July 1997.

[34] S. Perlmutter, S. Deusta, S. Gabi, G. Goldhaber, D. Groom, I. Hook, A. Kim, M. Kim, J. Lee, and R. Pain. Scheduled discoveries of 7 hight-redshift supernovae: first cosmology results and bounds on $q_0$. In R. Canal P. Ruiz-Lapuente and J. Isern, editors, *Thermonuclear Supernovae*, volume 486 of *NATO ASI*, page 749. Kluwer Academin Publishers, 1997.

[35] A. G. Riess, W. H. Press, and R. P. Kirshner. A Precise Distance Indicator: Type Ia Supernova Multicolor Light-Curve Shapes. *ApJ*, 473 :88–+, December 1996.

[36] John L. Tonry et al. Cosmological results from high-z supernovae. *Astrophys. J.*, 594 :1–24, 2003.

[37] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.* Wiley, 1972.

[38] B.F. Schutz. *A First course in general relativity.* Leninogorsk: Izdatel'stvo LPI, 1997.

[39] P.J.E. Peebles. *Principles of physical cosmology.* Princeton University Press, 1993.

[40] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner. The cosmological constant. *ARA&A*, 30 :499–542, 1992.

[41] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill, 1980.

[42] S.D. Odintsov I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro. *Effective Action in Quantum Gravity.* IOP Publishing, 1992.

[43] M.E. Peskin and D.V. Shröder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* College Press, 1998.

[44] Thomas Appelquist and J. Carazzone. Infrared singularities and massive fields. *Phys. Rev.*, D11 :2856, 1975.

[45] E. V. Gorbar and I. L. Shapiro. Renormalization group and decoupling in curved space. *JHEP*, 02 :021, 2003.

[46] Ilya L. Shapiro and Joan Solà. Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology. *JHEP*, 02 :006, 2002.

[47] Ilya L. Shapiro and Joan Solà. On the scaling behavior of the cosmological constant and the possible existence of new forces and new light degrees of freedom. *Phys. Lett.*, B475 :236–246, 2000.

[48] A. Babic, B. Guberina, R. Horvat, and H. Stefancic. Renormalization-group running of the cosmological constant and its implication for the Higgs boson mass in the standard model. *Phys. Rev.*, D65 :085002, 2002.

[49] B. Guberina, R. Horvat, and H. Stefancic. Renormalization-group running of the cosmological constant and the fate of the universe. *Phys. Rev.*, D67 :083001, 2003.

[50] Ilya L. Shapiro, Joan Solà, Cristina España-Bonet, and Pilar Ruiz-Lapuente. Variable cosmological constant as a planck scale effect. *Phys. Lett.*, B574 :149–155, 2003.

[51] A. Bonanno and M. Reuter. Cosmology of the Planck era from a renormalization group for quantum gravity. *Phys. Rev.*, D65 :043508, 2002.

[52] Eloisa Bentivegna, Alfio Bonanno, and Martin Reuter. Confronting the IR Fixed Point Cosmology with High Redshift Supernova Data. 2003.

[53] Ana Babic, B. Guberina, R. Horvat, and H. Stefancic. Renormalization-group running cosmologies: A scale-setting procedure. 2004.

[54] R. Opher and A. Pelinson. Studying the decay of the vacuum energy with the observed density fluctuation spectrum. *Phys. Rev. D*, 2004.

[55] http://snap.lbl.gov/.

[56] Robert R. Caldwell. A phantom menace? *Phys. Lett.*, B545 :23–29, 2002.

[57] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom Energy and Cosmic Doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :071301, 2003.

[58] Pedro F. Gonzalez-Diaz. You need not be afraid of phantom energy. *Phys. Rev.*, D68 :021303, 2003.

[59] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P Flannery. *Numerical Recipes in Fortran.* Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.

[60] Brian J. Barris and John L. Tonry. Redshift-independent distances to type ia supernovae. 2004.

[61] Cristina España-Bonet, Pilar Ruiz-Lapuente, Ilya L. Shapiro, and Joan Solà. Testing the running of the cosmological constant with type Ia supernovae at high z. *JCAP*, 0402 :006, 2004.

[62] A. G. Riess and et al. Type Ia Supernova Discoveries at z>1 From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. 2004.

[63] http://www.stsci.edu/science/goods.

[64] http://snfactory.lbl.gov/.

[65] J. Weller and A. Albrecht. Future supernovae observations as a probe of dark energy. *Phys. Rev. D*, 65(10) :103512–+, May 2002.

[66] A. Goobar and S. Perlmutter. Feasibility of Measuring the Cosmological Constant Lambda and Mass Density Omega Using Type Ia Supernovae. *ApJ*, 450 :14, September 1995.