

METODOS DEL ANALISIS NO-STANDAR EN LA TEORIA DE MODELOS FINITOS

Argimiro Arratia¹ y Carlos E. Ortiz²

¹ Departamento de Matemáticas, Universidad Simón Bolívar
Apartado 89000, Caracas 1080-A, Venezuela
arratia@ldc.usb.ve

² Department of Mathematics and Computer Science Beaver College
450 S. Easton Road, Glenside, PA 19038-3295 U.S.A.
ortiz@beaver.edu

RESUMEN: Se expone un plan para demostrar, utilizando Análisis No-estandar, si la clase de conjuntos cuya cardinalidad se descompone en un número par de factores primos distintos, no es definible en la lógica de primer orden con predicados para el orden lineal, las operaciones de adición multiplicación y exoneración en base 2, restringiendonos a modelos finitos.
Palabras clave: Análisis No-estandar, Teoría de Modelos Finitos, definibilidad.

NON-STANDAR ANALYSIS METHODS IN FINITE MODEL THEORY

ABSTRACT: We outline a plan to show, using Non-estandar Anlysis, that the equery "Is the number of distint prime factors of the cardinality of a finite set even ?" is not definable in a first-order language with built-in linear order, built-in operations of addition, multiplication and based 2 exponentiation. **Key words:** non-standar Analysis, Finite Model Theory, definiability.

Consideramos que toda estructura contiene al menos dos elementos; que el universo de cualquier estructura de cardinalidad $n > 1$ es el segmento inicial de números naturales $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Incorporamos a la lógica de primer orden con igualdad el conjunto de constantes lógicas $\Gamma = \{<, +, \times, 0, 1\}$, tales que en cualquier estructura de cardinalidad n , $<$ es el orden lineal de los naturales, $+$ y \times son suma y producto módulo n , 0 y 1 son nombres para el número cero y el número uno (también para el neutro aditivo y multiplicativo; para el primer y segundo elementos en el orden). $PO(\Gamma)$ es la lógica de primer orden con igualdad más los elementos en Γ . Esto es el conjunto de fórmulas de primer orden construidas a partir de los conectivos lógicos, los cuantificadores, la igualdad, los elementos en Γ y elementos de cualquier vocabulario finito τ .

Para cualquier vocabulario $\tau = \{R_1, \dots, R_s, C_1, \dots, C_r\}$, donde cada R_i es un símbolo relacional y cada C_j es un símbolo constante, una τ -estructura (de primer orden) es una estructura en el sentido usual de la Teoría de Modelos con las constantes lógicas de $\Gamma \cup \{=\}$ incorporadas. Por $STRUCT(\tau)$ denotamos el conjunto de todas las estructuras finitas sobre τ . Si $\mathcal{A} \in STRUCT(\tau)$ entonces $|A|$ denota la cardinalidad de su universo. Por N denotamos el conjunto de los números naturales y por $*N$ el conjunto de los naturales hiperfinitos.

Sea σ el vocabulario vacío. Una σ -estructura de tamaño $n > 1$ es $\{\{0, 1, \dots, n-1\}, <, +, \times, 0, 1\}$. Denotaremos esta σ -estructura por \mathcal{A}_n , para cada $n > 1$. Pretendemos demostrar que la siguiente clase de σ -estructuras finitas:

EFACTOR = $\{\mathcal{A} \in STRUCT(\sigma) : \text{el número de factores primos de } |A| \text{ es par}\}$

no es definible en $PO(\Gamma)$, utilizando métodos del Análisis No-estandar.

Ya que EFACTOR es definible en cierta extensión de $PO(\Gamma)$ con cuantificadores generalizados (o tipo Lindström), obtenemos así una distinción de la capacidad expresiva entre dos lenguajes de primer orden que creemos tiene como consecuencia una importante separación (ya conocida ³) entre dos clases de complejidad computacional, debido al puente entre la Teoría de Modelos Finitos y la Complejidad Computacional. Nuestra referencia para el Análisis No-estandar y Teoría de Modelos en general es ¹; para la Teoría de Modelos Finitos es ².

Sea $\langle V(N), \in \rangle$ el universo de las matemáticas sobre N . (Para cualquier conjunto X , $V(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n(X)$ donde $V_0(X) = X$ y $V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup P(V_n(X))$ para $n > 0$. $P(X)$ denota el conjunto de partes de X y \in es la relación de pertenencia.) En $\langle V(N), \in \rangle$ se pueden definir todos los elementos para la aritmética sobre N . En particular la estructura $\mathcal{N} := \langle N, <, +, \times, 0, 1 \rangle$ habita en $\langle V(N), \in \rangle$, con $<, +, \times, 0$ y 1 interpretados como es usual en N (todas estas operaciones y constantes son definibles en $\langle V(N), \in \rangle$). Más aún,

(1) EFACTOR es definible respecto a $\langle V(N), \in \rangle$ por una fórmula con cuantificadores acotados $EF(u, v) \in PO(\{\in\})$, en el siguiente sentido:

$$\forall n \geq 0, \mathcal{A}_n \in \text{EFACTOR} \iff \langle V(N), \in \rangle \models EF(n, N).$$

(2) Para toda sentencia $\psi \in PO(\Gamma)$, existe una fórmula con cuantificadores acotados $TRA^\psi(y, z) \in PO(\{\in\})$, tal que $\forall n > 0$,

$$\mathcal{A}_n \models \psi \iff \langle V(N), \in \rangle \models TRA^\psi(n, N).$$

Nuestro plan general será transferir el problema de expresabilidad de EFACTOR en $\langle V(N), \in \rangle$ a $\langle V(*N), \in \rangle$, el universo de las matemáticas sobre $*N$. Luego, para demostrar que EFACTOR no es definible en $\text{PO}(\Gamma)$ (respecto al universo $\langle V(N), \in \rangle$), bastará demostrar que existen enteros hiperfinitos K y p , con p primo y $K < p$, tal que

$$\mathcal{A}_K \equiv^{PO(\Gamma)} \mathcal{A}_{K \cdot p}.$$

En efecto: si existiese una sentencia $\Phi \in \text{PO}(\Gamma)$ tal que $\forall n > 1$,

$$\mathcal{A}_n \in \text{EFACTOR} \iff \mathcal{A}_n \models \Phi$$

entonces, por (1) y (2),

$$\langle V(N), \in \rangle \models \forall n \in N (EF(n, N) \iff \text{TRA}^\Phi(n, N)).$$

Por ser la anterior fórmula de cuantificadores acotados se tiene, por el *Principio de Transferencia*,

$$\langle V(*N), \in \rangle \models \forall N \in *N (EF(N, *N) \iff \text{TRA}^\Phi(N, *N)).$$

De esto último se concluye que \mathcal{A}_K y $\mathcal{A}_{K \cdot p}$ ambos satisfacen Φ y, en consecuencia, tienen universos de cardinalidad de igual paridad de factores primos, lo cual es una contradicción.

Para construir K y p será suficiente construir una sucesión de primos hiperfinitos $p_1 < p_2 < \dots < p_{d-1} < p_d$, tomar $K = p_1 p_2 \dots p_{d-1}$ y $p = p_d$, y demostrar que para un d suficientemente grande (hiperfinito) las estructuras \mathcal{A}_K y $\mathcal{A}_{K \cdot p}$ son indistinguibles por sentencias en $\text{PO}(\Gamma)$. Formalmente, nuestro plan es demostrar la existencia de una función interna $F : *N \rightarrow *N$ que es creciente y, para todo $i \in *N$, $F(i)$ es primo; además de la existencia de un índice $d \in *N$, tal que si $K = \prod_{i \leq d-1} F(i)$ entonces

$$\mathcal{A}_K \equiv^{PO(\Gamma)} \mathcal{A}_{K \cdot F(d)}.$$

Obsérvese que esta estrategia obliga a agregar un nuevo símbolo funcional a nuestro vocabulario inicial. A continuación describimos cómo vamos a proceder. Sea $*\mathcal{N} := \langle *N, * <, * +, * \times, * 0, * 1 \rangle$ la extensión elemental de \mathcal{N} en $\langle V(*N), \in \rangle$. Similar al caso de \mathcal{N} , en $*\mathcal{N}$ los símbolos $<, +, \times, 0$ y 1 tienen su interpretación usual (e.g., orden lineal, suma y producto de hiperfinitos).

Paso 1. Expresamos todas las $\text{PO}(\Gamma)$ -fórmulas en una forma canónica:

Lema 1: Sea $\phi(\bar{z}) \in \text{PO}(\Gamma)$, entonces existe una *fórmula de división*

$$\text{DIV}^\phi(\bar{z}, y_1, y_2) := Q_1 x_1 \dots Q_r x_r \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n \theta_{i,j}(\bar{z}, \bar{x}, y_1, y_2)$$

tal que $\forall h \in *N$ y $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ con $a_i \leq h$

$$\mathcal{A}_h \models \phi(\bar{a}) \iff *\mathcal{N} \models \text{DIV}^\phi(\bar{a}, h, h)$$

donde $\theta_{i,j}(\bar{z}, \bar{x}, y_1, y_2)$ es una de las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} & \exists w(t_1(\bar{z}, \bar{x}) = t_2(\bar{z}, \bar{x}) + y_1 \times w); \text{ ó} \\ & \forall w \neg(t_1(\bar{z}, \bar{x}) = t_2(\bar{z}, \bar{x}) + y_2 \times w); \text{ ó} \\ & t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x}) \text{ ó } \neg(t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})); \end{aligned}$$

para algunos términos de $\text{PO}(\Gamma)$, $t_1(\bar{z}, \bar{x})$, $t_2(\bar{z}, \bar{x})$, $t_1(\bar{x})$ y $t_2(\bar{x})$.

Por ejemplo, considere $\phi(z_1, z_2) := z_1 \leq z_2$ entonces la fórmula de división correspondiente es

$$\begin{aligned} \text{DIV}^\phi(z_1, z_2, y_1, y_2) &:= \exists q_1 \exists q_2 \exists q_3 \forall s_1 \forall s_2 \\ &([\exists w_1(z_1 = w_1 \times y_2 + q_1) \wedge \exists w_2(z_2 = w_2 \times y_2 + q_2) \wedge \\ & q_1 + q_3 = q_2 \wedge \neg(s_1 + s_2 = q_3)] \vee \\ &[\exists w_1(z_1 = w_1 \times y_2 + q_1) \wedge \exists w_2(z_2 = w_2 \times y_2 + q_2) \wedge \\ & q_1 + q_3 = q_2 \wedge \forall w \neg(q_1 + s_1 = w \times y_1)]) \end{aligned}$$

Intuitivamente, en $*\mathcal{N}$ decimos que z_1 y z_2 son congruentes a algunos q_1 y q_2 modulo h , respectivamente, $q_1 \leq q_2$, y q_1 y q_2 están dentro de la misma copia de \mathcal{A}_h .

Paso 2. Agregamos un nuevo símbolo funcional g al vocabulario $\{\in\}$; definimos la versión funcional de $\text{DIV}^\phi(y_1, y_2)$ (esto es $\text{FUNCDIV}^\phi(y_1, y_2, g)$) y demostramos su equivalencia. (A modo de ilustración: sea

$$\begin{aligned} \text{DIV}^\phi(y_1, y_2) &:= \exists w(t_1 = t_2 + y_1 \times w) \wedge \\ & \forall w \neg(t_1 = t_2 + y_2 \times w) \end{aligned}$$

entonces su versión funcional es

$$\begin{aligned} \text{FUNCDIV}^\phi(y_1, y_2, g) &:= \forall q \leq y_1 \exists w(t_1 = t_2 + g(q) \times w) \wedge \\ & \exists q \leq y_2 \forall w \neg(t_1 = t_2 + g(q) \times w) . \end{aligned}$$

Lema 2: Sean ϕ una sentencia en $\text{PO}(\Gamma)$, $h \in *N$ y $F : *N \rightarrow *N$ una sucesión arbitraria de primos distintos. Si $N = \prod_{i \leq h} F(i)$, entonces

$$*\mathcal{N} \models \text{DIV}^\phi(N, N)$$

si y sólo si

$$\langle *\mathcal{N}, F \rangle \models \text{FUNCDIV}^\phi(h, h, g).$$

Paso 3. Demostramos la existencia de $F : *N \rightarrow *N$ y $d \in *N$ con las propiedades requeridas:

Lema 3: Existe una función interna $F : *N \rightarrow *N$ y un número hiperfinito d que satisfacen las siguientes tres propiedades:

- 1 F es una sucesión creciente y para todo $i \in *N$, $F(i)$ es un número primo en $*N$.
- 2 Para cualquier sentencia $\phi \in \text{PO}(\Gamma)$, si existe $n \in N$ tal que para todo $k \in N$ con $k \geq n$, se tiene

$$\langle *\mathcal{N}, F \rangle \models \text{FUNCDIV}^\phi(k, k, g)$$

entonces, para todo h con $n \leq h \leq d$,

$$\langle *\mathcal{N}, F \rangle \models \text{FUNCDIV}^\phi(h, h, g).$$

3 Para cualquier sentencia $\phi \in \text{PO}(\Gamma)$, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$, se tiene entonces

$$\langle *N, F \rangle \models \neg \text{FUNCDIV}^\phi(k, k, g)$$

entonces, para todo h con $n \leq h \leq d$,

$$\langle *N, F \rangle \models \neg \text{FUNCDIV}^\phi(h, h, g). \quad \square$$

$$\mathcal{A}_K \equiv^{PO(\Gamma)} \mathcal{A}_{K, F(d)}.$$

Por Lema 1 y Lema 2 esto equivale a demostrar

$$\langle *N, F \rangle \models \text{FUNCDIV}^\phi(d-1, d-1, g)$$

si y sólo si

$$\langle *N, F \rangle \models \text{FUNCDIV}^\phi(d, d, g).$$

Paso 4. Sean F y d como en el Lema 3. Si $K = \prod_{i \leq d} F(i)$

Luego usamos Lema 3. \square

REFERENCIAS

1. **Chang, C.C.** and **Keisler, H.J.** *Model Theory*, North-Holland,(Amsterdam), 1990.
2. **Ebbinghaus, H.D.** and **Flum, J.** *Finite Model Theory*, Springer-Verlag, (Berlin), 1995.
3. **M. Furst, J.B. Saxe** and **M. Sipser.** *Parity, circuits, and the polynomial time hierarchy*, Math. Systems Theory **17**:13–27, 1984.

Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia

Editor Jefe

Juscelino Tovar

Editores Asociados

Aaron Méndez

Jesús del Castillo

José R. León

Eduardo Romero Vecchione

Editores de Campo

Javier García Benavides (Agronomía)

Erika Wagner (Antropología)

María Matilde Suárez (Antropología)

Julio Urbina (Biofísica)

Reinaldo Di Polo (Biofísica)

José Luis Ramírez (Biología Celular)

Abul Bashirullah (Biología Marina)

Abraham Levy Benshimol (Bioquímica)

Elena Ryder (Bioquímica)

Franco Urbani (Ciencias de la Tierra)

Luis Levín (Comportamiento)

Klaus Jaffe (Comportamiento)

Renata Wulff (Ecología Vegetal)

Alfonso Orantes (Educación)

Yaira Mathison (Farmacología)

Anita Stern de Israel (Farmacología)

Estrella Laredo (Física Experimental)

N.V. Joshi (Física Experimental)

Luis Herrera Corneta (Física Teórica)

Máximo García Sucre (Fisicoquímica)

Wilmer Olivares (Fisicoquímica)

Ernesto González (Fisiología)

Sonia H. de Torres (Fisiología)

Vidal Rodríguez Lemoine (Genética)

María Cristina Di Prisco (Inmunología)

Marianela Castes Boscán (Inmunología)

Carlos Di Prisco (Matemáticas)

Luis Raúl Pericchi (Matemáticas)

Francisco Yegres (Microbiología)

Tomás Istúriz (Microbiología)

Miguel Layrisse (Medicina)

José Luis Cevallos (Medicina)

Ernesto Bonilla (Neurociencia)

Horacio Vanegas (Neurociencia)

Servio Urdaneta (Parasitología)

José Vicente Scorza (Parasitología)

José Miguel Salazar (Psicología)

Benjamín Scharifker (Química)

Juan Carlos Navarro (Sociología)

José Przybylski (Tecnología)

Roberto Briceño León (Sociología)

Rafael Bello (Tecnología de Alimentos)

Rafael Carreño (Tecn. de Alimentos)

Marisol Aguilera (Zoología)

Antonio Machado (Zoología)

Diagramación y Montaje

Mildred Graterol

Diseño gráfico de la portada

Arq. José L. Garrido

Consejo de Política Editorial

Capítulo Aragua

Coromoto Michelangeli

Manuel Toro Benítez

Capítulo Carabobo

Elena Ibarra

Carlos Linares

Capítulo Caracas

Ernesto González

Benjamin Sharifker

Capítulo Lara

Cristophe Kossowsky

José Antonio Moreno Yanes

Capítulo Falcón

Francisco Emiro Durán

Nicole Richard de Yegres

Capítulo Merida

Rita Giacalone

Hermínía Gil

Capítulo Oriente

Marcos Tulio Díaz

Rafael Alemán

Capítulo Yaracuy

Luis Valles de González

Ledy Vicierra

Capítulo Zulia

Paúl Aponte

ACTA CIENTÍFICA VENEZOLANA es una revista multidisciplinaria que considera para su publicación trabajos originales en cualquier área de la ciencia. Un *Artículo* describe un estudio completo y definitivo. Una *Nota* un proyecto completo, pero más corto, que se refiere a hallazgos originales o importantes modificaciones de técnicas ya descritas. Un *Ensayo* trata aspectos relacionados con la ciencia pero no está basado en resultados originales. Una *Revisión* es un artículo solicitado por invitación de la comisión editora y comenta la literatura más reciente sobre un tema especializado. *Avances de Investigación* da cabida a comunicaciones sobre investigaciones en marcha que ameritan una rápida difusión. Las secciones *Editorial* y *Opinión* están abiertas a toda la comunidad científica. Instrucciones precisas para la presentación definitiva del texto, aparecen en el primer número de cada volumen.

Los manuscritos deben ser enviados por triplicado al Editor, quien los someterá a revisión crítica de al menos dos árbitros. La aceptación de los manuscritos está basada en el contenido científico y en la presentación de acuerdo a las normas editoriales de la revista. Se aceptarán trabajos escritos en castellano, portugués o inglés. Los manuscritos enviados para publicación deben ser concisos y correctos en su estilo y en el uso de abreviaturas. El hecho de someter un trabajo implica que el mismo no ha sido publicado ni está sometido a consideración de otra revista científica.

Los trabajos deben ir acompañados por un resumen, tanto en español como en inglés. El autor debe anexar un título en español y uno en inglés. Debe también indicar un título más breve, en el mismo idioma del artículo, para ser utilizado como encabezamiento de cada página, y una lista de palabras clave, tanto en el idioma original como en inglés. Las figuras y fotografías deben identificarse en el reverso a lápiz con el número que le corresponde y el nombre del primer autor y título del trabajo. Debe presentarse una lista de figuras junto con las leyendas de cada una, escritas a doble espacio en hojas separadas. Cada tabla debe también presentarse en hoja aparte. En general, recomendamos a los autores acompañar el texto del trabajo con una lista de todos los anexos: figuras, fotografías, tablas, etc. Las referencias deben estar ordenadas alfabéticamente y numeradas progresivamente.

Para asegurar mayor rapidez en la consideración de su manuscrito, se aconseja prepararlo de acuerdo a las "Instrucciones a los Autores" que se publican en el primer número de cada año, o pueden solicitarse por escrito al Editor. Invitamos a los autores a incluir, en caso de disponibilidad, una copia del texto aceptado y corregido en formato electrónico (PC ó Macintosh), para facilitar el rápido proceso de las pruebas.

La Comisión Editora es responsable de los comentarios y editoriales que aparezcan sin firma. Las opiniones expresadas no traducen necesariamente el criterio de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, ni obligan a sus miembros. Los lectores están cordialmente invitados a expresar su opinión en la sección *Cartas al Editor*.

Tarifas de suscripción anual: Bs. 20000 para Bibliotecas Nacionales. Bs. 16000 para no miembros de AsoVAC. US\$ 180 para Bibliotecas extranjeras y US\$ 100 para suscriptores individuales fuera de Venezuela.

ACTA CIENTÍFICA VENEZOLANA is a multidisciplinary journal, publishing research papers in any scientific topic. *Articles* should describe a complete and definitive study. *Notes* should describe a complete project, shorter, and usually referring to original findings or important modifications of previously described techniques. *Essays* discuss general scientific problems but are not based on original results. *Reviews* are published only by request of the Editors and discuss the most recent literature on a given subject. The section *Research Advances* will publish short communications of results which deserve immediate publication. The sections *Editorial* and *Opinion* are open to all the scientific community. Precise instructions to present manuscripts appear in the first number of each volume.

Manuscripts should be sent in original and two copies to the Editors, and will be critically reviewed by at least two referees. Acceptance of papers for publication will be based only on their scientific content and on the presentation of the material according to Acta's editorial norms. Manuscripts can be presented in Spanish, Portuguese or English. English and Spanish abstracts should be provided in all cases, with the paper's complete title translated into these languages. A shorter title in the paper's original language should be included for use as running head. A list of key words in the same language and in English should be included.

Manuscripts submitted for publication should be concise and appropriate in style and use of abbreviations. Submission of a paper implies it has not been published nor is being considered for publication by any other journal. Figures, photographs and tables should be clearly numbered and identified by the first author and short title written with a pencil in their reverse side. Figure legends should be typed on a separate sheet. A list of all material accompanying the manuscript (such as figures, photos, tables, etc.) should be included. References, at the end of the manuscript, should be ordered alphabetically, numbered progressively.

In order to ensure prompt attention to each manuscript, authors are advised to consult the "Instructions to Authors" which appear in the first issue of each year and can be obtained from the Editorial Board. We invite our contributors to submit, if possible, a copy of the text in electronic format (PC or Macintosh) for faster processing.

The Editorial Board is responsible for all commentaries and editorials which are unsigned. AsoVAC does not necessarily agree with any opinions expressed in Acta Científica Venezolana, nor these opinions represent those of any individual member. Readers are invited to make comments by sending letters to the Editor.

Yearly subscription rates: US\$ 180 for foreign libraries and US\$ 100 for individual subscriptions outside of Venezuela.

Esta Revista ha sido financiada parcialmente por:

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT). Fundación Venezolana para el Avance de la Ciencia (FundAVAC). CDCH de la Universidad Central de Venezuela. CDCHT de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. CDCHT de la Universidad de Los Andes. CDCH de la Universidad de Carabobo;

Sistemas de Referencia:

Biological Abstracts; Biblioteca Regional de Medicina (BIREME); Bowker Serial Directories; Cambridge Scientific Abstracts; Chemical Abstracts Service; Current titles in Ocean, Coastal, Lake & Waterway Sciences; International Bibliography of Periodical Literature (IBZ); Index Medicus; Mathematical Reviews; Periódica CICH-UNAM; University Microfilm International; Zentralblatt für Mathematik; Zoological Record.

Versión electrónica:

<http://acta.ivic.vg>