

Teoria de la Computació

Tema 6: Màniques de Turing. Decidibilitat, semidecidibilitat, computabilitat.

Teoria:

- Vídeos 27 i 28 (Màquines de Turing).
- Vídeos 29, 30 i 31 (Decidibilidad, semidecidibilidad, computabilidad).

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Escrivid TM sencillas para los siguientes lenguajes:
 - (a) $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.
 - (b) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* \wedge \text{valor}_2(w_1) = \text{valor}_2(w_2) + 1\}$.
 - (c) $\{ww | w \in \{0, 1\}^*\}$.
 - (d) $\{0^{2^n} | n \geq 0\}$
2. Escrivid 2-TM (o 3-TM o 4-TM en caso de necesidad) sencillas para los siguientes lenguajes:
 - (a) $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.
 - (b) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* \wedge \text{valor}_2(w_1) = \text{valor}_2(w_2) + 1\}$.
 - (c) $\{ww | w \in \{0, 1\}^*\}$.
 - (d) $\{0^{2^n} | n \geq 0\}$
 - (e) $\{0^{n^2} | n \geq 0\}$
3. Argumenta a grandes rasgos que las máquinas de Turing no-deterministas no son más expresivas que las máquinas de Turing deterministas.
4. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos dos pilas, las transiciones dependen del contenido de la cima de ambas pilas, y en la acción de cada transición se puede o bien borrar el elemento de la cima o bien añadir nuevos elementos, todo ello en ambas pilas. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.
5. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos una cola, las transiciones dependen del contenido del inicio de la cola, y en la acción de cada transición se puede borrar el elemento del inicio, y también añadir nuevos elementos al final de la cola. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.
6. Demuestra que los lenguajes decidibles son cerrados por las siguientes operaciones:
 - (a) Intersección.

- (b) Complementario.
- (c) Resta (de conjuntos).
- (d) Reverso.
- (e) Concatenación.
- (f) Estrella.
- (g) Morfismo inverso.
- (h) Shiftado.

7. Demuestra que los lenguajes decidibles no son cerrados por morfismo directo.
8. Demuestra que los lenguajes semidecidibles son cerrados por las siguientes operaciones:
 - (a) Intersección.
 - (b) Concatenación.
 - (c) Reverso.
 - (d) Estrella.
 - (e) Morfismo directo.
 - (f) Morfismo inverso.
 - (g) Shiftado.
9. Demuestra que los siguientes conjuntos son semidecidibles:
 - (a) $\{\langle x, y \rangle | M_x(y) \downarrow\}$.
 - (b) $\{x | \exists y : M_x(y) \downarrow\}$.
 - (c) $\{\langle u, v, R \rangle | u \rightarrow_R^* v\}$.
 - (d) $\{G \in \text{CFG} | G \text{ ambigua}\}$.
 - (e) $\{\langle G_1, G_2 \rangle | G_1, G_2 \in \text{CFG} \wedge \mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset\}$.
10. Sea B un conjunto semidecidible y sea C un conjunto que cumple $C = \{x | \exists y : \langle x, y \rangle \in B\}$. Demuestra que C es semidecidible.
11. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es decidable si y solo si existe una función computable, total, inyectiva y creciente cuya imagen es C .
12. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es semidecidible si y solo si existe una función computable total e inyectiva cuya imagen es C .
13. Sea f una función computable e inyectiva. Es f^{-1} computable e inyectiva?
14. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente decreciente. Podemos asegurar que es computable?
15. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidable y A es decidable. Eso implica que B es decidable?
16. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidable y A es semidecidible. Eso implica que B es semidecidible?