

82. Considereu un dígraf $G = (V, E)$ en el que cada arc $e \in E$ té associat una capacitat $u_e \in \mathbb{R}^+$ i un cost $c_e \in \mathbb{R}$. El cost s'interpreta com el cost de transportar una unitat al llarg de l'arc. Cada node $v \in V$ té associada una demanda $b_v \in \mathbb{R}$. Si $b_v \geq 0$, v és un sumider, si no és una font. Assumim que la suma de totes les demandes es 0. Considereu el problema de cobrir la demanda de les fonts, a partir de l'oferta dels sumiders mitjançant un flux vàlid amb el mínim cost possible. Doneu una formalització d'aquest problema com programació lineal i calculeu el seu dual.

83. Donat un graf $G = (V, E)$, volem obtenir un recobriment de vèrtexs mínim, és a dir un conjunt $S \subseteq V$, amb mínim nombre de vèrtexs, tal que qualsevol aresta a G té al menys un extrem a S .

(a) Doneu una formalització com a problema de programació entera (IP-VC). En aquest cas heu de fer servir les variables x_1, \dots, x_n que han de tenir valors 0 o 1 indicant si el vèrtex i és o no a S . Completeu la resta de restriccions lineals i la funció a minimitzar.

(b) Considereu el problema de programació lineal en la que la condició $x_i \in \{0, 1\}$ es substitueix per $x_i \in [0, 1]$ (LP-VC). Sigui $y = (y_1, \dots, y_n)$ una solució òptima de LP-VC.

Definim $\epsilon = \min_{y_i \notin \{0, 1/2, 1\}} \{y_i, |y_i - 1/2|, 1 - y_i\}$, considereu les solucions:

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \epsilon & 0 < y_i < 1/2 \\ y_i + \epsilon & 1/2 < y_i < 1 \\ y_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad y''_i = \begin{cases} y_i + \epsilon & 0 < y_i < 1/2 \\ y_i - \epsilon & 1/2 < y_i < 1 \\ y_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

Demostreu que y' i y'' son també solucions òptimes i que, a més, si y té alguna coordenada fora de $\{0, 1/2, 1\}$, llavors y' o y'' tenen menys coordenades fora de $\{0, 1/2, 1\}$ que y .

(c) Considereu el següent algorisme

function RELAX+ROUND VC(G)

 Construir el LP-VC associat a G

 Obtenir y una solució òptima de LP-VC

 Repetint el procediment del apartat previ

 obtenir una solució òptima de LP-VC y' amb $y'_i \in \{0, 1, 1/2\}$

 Obtenir x com $x_i = 0$ si $y'_i = 0$, $x_i = 1$ si no.

return (x)

Demostreu que Relax+Round VC és una 2-aproximació al problema plantejat amb cost polinòmic.

84. Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit i sigui A, B una partició de V . Considerem el següent joc bipersonal. Tenim dos jugadors a i b . El jugador a selecciona un node $u \in A$ i a la vegada el jugador b selecciona un node $v \in B$. Quan el camí més curt de u a v es més llarg que el camí més curt de v a u , b paga a a $d(v, u) - d(u, v)$ euros. En cas contrari a paga a b $d(u, v) - d(v, u)$ euros.
- (a) Doneu un algorisme de cost polinòmic per obtenir matrius que indiquin, per a cada possible parell de nodes seleccionats, la quantitat d'euros que guanya el jugador a i el jugador b respectivament.
 - (b) Suposant que el jugador a juga estratègicament seleccionat una distribució de probabilitat x sobre A i el jugador b juga estratègicament seleccionat una distribució de probabilitat y sobre B , doneu una expressió que ens permeti obtenir el guany esperat per a cada jugador assumint independència en la selecció de nodes.
 - (c) Trobeu un algorisme amb cost polinòmic per obtenir una estratègia x per a que maximitzi el seu benefici assumint que b seleccionarà un node que minimitzi el benefici que obté a jugant x . Ajut: considereu una formalització com a problema de programació lineal.

85. Sigui $h(x) = x \pmod{m}$ una funció de dispersió on $m = 2^p - 1$. Si S és una cadena de caràcters corresponent a la representació en base 2^p d'un natural. Demostreu que si la cadena S' es pot derivar de S permutant caràcters, aleshores $h(S) = h(S')$.

86. **Sopa de lletres** L'entrada al problema del *la sopa de lletres* consisteix d'una graella $n \times n$, on cada cada quadrat conte una lletra i una base de dades amb $m < n^2$ mots, cada mot amb ℓ lletres. Notem que la mida total de l'entrada és $(n^2 + m\ell)$. Cadascun dels m mots a la base de dades està amagat a la graella, ja sigui horitzontal o verticalment. En aquest problema no admetem mots en diagonal o amb intersecció no buida, però els mots si que poden estar amagats en sentit invers. La taula a sota presenta un exemple amb $n = 8, m = 7, \ell = 4$ i amb la base de dades (VUIT, HASH, ROCA, TRES, TRET, CLAU, KILO).

L	A	S	B	A	R	C	A
A	A	F	D	H	S	A	H
R	O	C	A	Z	U	C	E
I	T	T	I	U	V	U	K
S	I	L	A	L	B	A	I
A	C	O	B	U	K	L	L
L	B	T	E	R	T	C	O
B	E	L	T	R	E	S	Z

Construiu un algorisme que trobi a la graella tots els mots de la base de dades (és a dir, torna les coordenades de la primera lletra de cada paraula) i analitzeu el seu temps d'execució com a funció de n , m i ℓ .

87. Supposeu que Pepet té un conjunt X amb les seves n cançons favorites i Ramonet té un altre conjunt Y amb les seves n cançons favorites. Volem dissenyar un algorisme per a determinar si Pepet i Ramonet tenen gustos musicals semblants. Per fer això, cadascun d'ells construeix un filtre de Bloom amb k taules de grandària m , i k funcions de Hash.
- (a) Calculeu, com a funció de m, n, k i de $|X \cap Y|$, el nombre esperat de bits on les k taules són diferents (que correspondran a diferències entre les llistes X i Y).
 - (b) Utilitzant el filtre de Bloom descrit, doneu un algorisme per a trobar les diferències entre les llistes X i Y , i compareu-lo amb l'algorisme obvi d'ordenar X i Y i comparar element a element. (NOTA: és millor fer-ho amb una taula i una funció de hash).

88. Suposem que n usuaris volen utilitzar un recurs o un servei Web, com ara el temps en un supercomputador. El recurs s'ha d'utilitzar seqüencialment, un usuari a la vegada. Per descomptat, cada usuari vol fer us del recurs tan aviat com sigui possible. Expliqueu com podem obtenir una permutació dels usuaris ràpidament i de manera justa assumint que cada usuari en té un identificador numèric. Teniu en compte la llargada de identificador en el disseny de la vostra solució

89. Supposeu que hi han n països que comercien entre ells. Per a cada país i , coneixem el valor del seu superàvit pressupostari s_i , (aquest nombre pot ser positiu o negatiu, un nombre negatiu indica un dèficit). Per a cada parell de països i, j coneixem $e_{i,j} \geq 0$, el valor total de totes les exportacions d' i cap a j , aquest nombre és sempre no negatiu. Diem que un subconjunt S dels països és *autosuficient* si la suma dels superàvits pressupostaris dels països a S , menys el valor total de tots els exportacions dels països a S cap a els països que no són a S , és positiu. Doneu un algorisme polinòmic, que a partir d'aquestes dades per n països, decideix si existeix un subconjunt **no buit**, que és autosuficient.

90. (Reservoir sampling). Suposem que tenim una seqüència d'objectes, tots diferents, que passen un per cada unitat de temps (al primer pas passa l'objecte 1, i al pas t passa l'objecte t). Volem mantenir una mostra formada per un únic objecte, però que tingui la propietat de que l'objecte guardat a temps t estigui uniformement distribuït sobre tots els objectes que han aparegut fins aquell moment (i.e. al pas t han passat t objectes i la probabilitat d'escollir l'objecte que tenim a la mostra és $1/t$). A priori no coneixem el nombre total d'objectes que ens seran donats (és a dir, la durada del procés). A més, no volem emmagatzemar tots els objectes que hem rebut.

Considereu el següent algorisme que emmagatzema en memòria exactament un objecte a cada pas:

Al primer pas, quan ens donen el primer objecte, el fem a memòria. Al pas k -èsim, amb probabilitat $= 1/k$, el nou objecte substitueix el que teníem en memòria.

Expliqueu per què aquest algorisme resol correctament el problema.