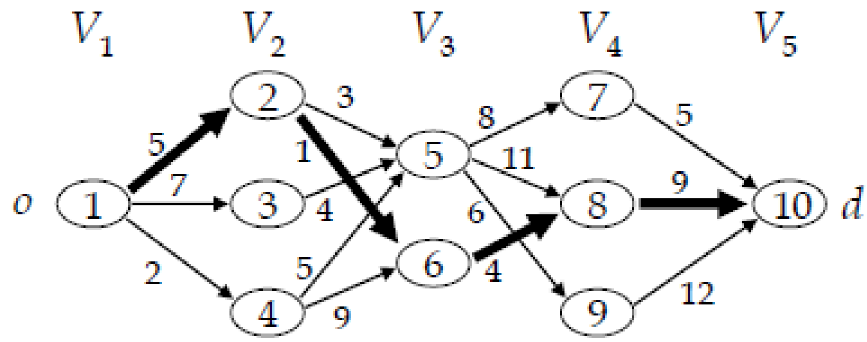
77. Sigui $G = (V, E)$ un graf dirigit amb pesos $w : V \to \mathbb{Z}^+$, donats dos vèrtexs $u_1, u_2 \in V$ definim el pes d'un camí $w(P(u_1, u_2))$ com $\sum_{v \in P(u_1,u_2)} w(v)$. Si tenim com a entrada G, w, u_1, u_2, doneu un algorisme per a calcular el camí amb menys pes entre u_1 i u_2. Quina és la seva complexitat? (Ajut: transformeu G en G' on els pesos siguin a les arestes)

    Una solució Farem servir l'ajut: construir un nou graf G' idèntic al G, excepte que que per a tota aresta $(\vec{u, v})$ definim $w(\vec{u, v}) = w(v)$. El cost de crear G' és $O(n+m)$. Com els pesos són positius, podem utilitzar Dijkstra per calcular el camí més curt entre u_1 i u_2 amb un cost $O(m \lg n)$ (utilitzant un heap) o podem utilitzar Bellman-Ford amb un cost $O(nm)$. Per a demostrar que el camí més curt a G' també és el camí més curt a G, sigui $u_1, v_1, \ldots, v_k, u_2$ un camí amb pes $w(u_1) + w(v_1) + \cdots + w(v_k) + w(u_2)$ a G, el mateix camí aG' tindrà pes $w(\vec{u_1, v_1}) + \cdots + w(\vec{v_k, u_2})$ que és $= w(v_1) + \cdots + w(v_k) + w(u_2) \Rightarrow$ els pesos de qualsevol camí en G i G' es diferencien en $w(u_1)$, per tant un camí amb distancia mínima a G' també serà un camí amb distancia mínima a G.

78. Els estudiants de la FIB volen dissenyar una xarxa social (i.e. un graf dirigit $G = (V, E)$) per determinar el grau de simpatia entre tota la comunitat universitària a la UE. El graf es dissenya a partir de relacions personals; si a coneix b, $a, b \in V$ i $(a, b) \in E$. A més, a cada aresta (a, b) se li assigna un pes entre 0 i 10 que indica la simpatia de b en opinió de a (0 molta antipatia, 10 molta simpatia).

    Per tal que un estudiant a pugui tenir una idea del grau de simpatia d'un estudiant d que no coneix, simplement ha de trobar el valor del camí amb pes màxim $\mu(a, d)$ i el valor del camí amb pes mínim $\delta(a, b)$. Però hi ha un problema no sabem com trobar el valor del camí amb pes màxim. Per sort hi ha un estudiant de l'assignatura d'Algorísmia de la FIB té una l'idea: negar el valor dels pesos (i.e. si una aresta té pes 7, assignar-li el pes -7) i aplicar Bellman-Ford per a trobar el camí mínim, que serà el màxim sense negar. Penseu que l'algorisme del vostre col·lega és una bona solució?

79. Camí més curt en DAG multi-etapa. Un graf dirigit acíclic (DAG) $G = (V, E)$ és multi-etapa quan els vèrtexs es poden dividir en k subconjunts $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ tal que cada arc va des un subconjunt V_i al següentV_{i+1}. A més, el primer i últim subconjunt contenen exactament un vèrtex cadascun (és a dir, $V_1 = \{o\}$ i $V_k = \{d\}$ als que direm font i embornal, respectivament. A la figura següent teniu un exemple de DAG multi-etapa ponderat.



Dissenyeu un algorisme que calculi el camí més curt a partir de o a d en un DAG multi-etapa ponderat.

80. L'arbitratge de divises és una situació en la qual un operador de monedes intel·ligent pot executar una seqüència de canvis de moneda per tal de obtenir una quantitat potencialment il·limitada de diners. Per exemple, suposem que els dòlars nord-americans s'estan comprant en el mercat de divises per 50 rupies i una altra moneda al mercat de divises ven dòlars nord-americans per 40 rupies. En aquesta situació, un operador podria intercanviar 1 milió de dòlars per l'equivalent a 50 milions de rupies i després intercanvien les rupies per 50 milions / 40 = 1,25 milions de dòlars. Les situacions d'arbitratge de divises que ens plantegem són més complexes i implican diversos passos de conversió entre moltes monedes. Per exemple, en el següent quadre de conversió teniu un arbitratge de tres passos.

Problem. Given table of exchange rates, is there an arbitrage opportunity?

	USD	EUR	GBP	CHF	CAD
USD	1	0.741	0.657	1.061	1.011
EUR	1.350	1	0.888	1.433	1.366
GBP	1.521	1.126	1	1.614	1.538
CHF	0.943	0.698	0.620	1	0.953
CAD	0.995	0.732	0.650	1.049	1

Ex. \$1,000 $\Rightarrow$ 741 Euros $\Rightarrow$ 1,012.206 Canadian dollars $\Rightarrow$ \$1,007.14497.

$1000 \times 0.741 \times 1.366 \times 0.995 = 1007.14497$

Dissenyeu un algorisme que, donada una taula de conversió, trobi un arbitratge que ens permeti incrementar, si és posible, la nostra quantitat inicial de diners.

81. En aquest problema, estudiem la relació entre *arbres d'expansió mínims* (MST) i *arbres de camins mínims* en un graf no dirigit G. Recordeu que donat un $G = (V, E)$ amb pesos $w : E \to \mathbb{R}$ i un punt $s \in V$ l'arbre de camins mínims arrelat a s és un subgraf $T' = (V', E')$ de G tal que:

   (a) T' és un arbre, i per tant $|E'| = |V'| - 1$,

   (b) hi a un camí de s fins a qualsevol vertex a V',

   (c) per a qualsevol $u \in V'$, la distancia de s a u a T' és la mateixa que la distancia de s a u a G.

   Recordeu que, igual que succeix amb el MST, donat un $s \in V'$, G pot tenir més d'un arbre de camíns mínims arrelat a s.

   (a) Demostreu si és cert o no que donat qualsevol graf connex i no dirigit G, amb $w : E \to \mathbb{R}^+$, sempre hi ha un arbre de camins mínims T' tal que T' també és un arbre d'expansió mínima a G.

   (b) Demostreu si pot haver-hi un graf no dirigit G amb $w : E \to \mathbb{R}^+$ i connex, tal que G tingui un arbre de camins mínims T' i un MST T que no comparteixen cap aresta.

82. Volem planificar una serie d'esdeveniments al llarg d'un període de temps. El sistema només permet expressar restriccions del tipus: L'esdeveniment i es realitza almenys x dies després de l'esdeveniment j, o bé del tipus: l'esdeveniment i es realitza no més de y dies abans de l'esdeveniment k. Donat un conjunt de restriccions d'aquests dos tipus, per a un conjunt de n esdeveniments, doneu un algorisme que proporcioni una planificació que respecti les restriccions (si n'hi ha una). Analitzeu-ne el seu cost.

    Ajut: Penseu com podeu formalitzar les restriccions donades amb un graf amb pesos.

83. Les xarxes ad-hoc, composades per dispositius sense fils de baixa potència, s'han proposat per situacions com els desastres naturals en què els coordinadors dels treballs de rescat podrien controlar les condicions en zones de difícil accés. La idea és que una gran col·lecció d'aquests dispositius sense fils es podria llançar des d'un avió en una regió per a continuació reconfigurar-se com una xarxa operativa.

Estem parlant de: (a) dispositius relativament barats, el quals (b) es llancen des d'un avió a (c) un territori perillós; i per la combinació de (a), (b) i (c), es fa necessari fer front a la fallida d'un nombre raonable dels dispositius.

Ens agradaria que fos el cas que si un dels dispositius v detecta que està en perill de fallar, transmetés una representació del seu estat a un altre dispositiu a la xarxa. Cada dispositiu té un abast de transmissió limitat, pot comunicar-se amb altres dispositius que es troben com a màxim a d metres d'ell. Com que no volem que es transmeti el seu estat a un dispositiu inoperant, hem d'incloure una mica de redundància: Un dispositiu v ha de tenir un conjunt de k altres dispositius en un radi de d metres de distància. Anomenarem a aquest conjunt una *còpia de seguretat* per al dispositiu v.

Suposeu que després del llançament podem obtenir les coordenades $p_i = (x_i, y_i)$ dels n dispositius operatius que formen la xarxa inicial.

Dissenyeu un algorisme per determinar si és possible triar una còpia de seguretat per a cada dispositiu, amb la propietat addicional que, per algun paràmetre donat b, cap dispositiu apareix en la còpia de seguretat de més de b altres dispositius. L'algorisme ha de proporcionar com a sortida també els conjunts de còpia de seguretat, sempre que es puguin trobar.

Una solució: Resolveremos el problema como un problema de flujo máximo. Para ello construimos una red formado por un grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{s, t, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ y lo arcos en E y sus capaciades son las sigientes:

- Para $i \in [n]$, (s, u_i) con capacidad k y arco (v_i, t) con capacidad b.
- Para $i, \in [n]$ con $i \neq j$ y $d(p_i, p_j) \leq d$, (u_i, u_j) con capacidad 1.

Supongamos que podemos seleccionar copias de seguridad C_i para todo $i \in [n]$ verificando las restricciones. En este caso, par $j \in C_i$ sabemos que $d(p_i, p_j) \leq d$ y por tanto $(u_i, v_j) \in E$. Definimos la siguiente asignación de flujo: para $i \in [n]$ $f(s, u_i) = k$ y para $(u_i, v_j) \in E$, $f(u_i, v_j) = 1$ si $j \in C_i$, $f(u_i, v_j) = 0$ si $j \in C_i$; para $j \in [n]$, $f(u_j, t) = \sum_{i \in [n] i \neq j} f(u_i, v_j)$. Al cumplirse las restricciones, la asignación f es un flujo válido con valor kn.

Supongamos que en la red tenemos un flujo válido f con valor kn, definimos para $i \in [n]$ el conjunto $C_i = \{j \mid (u_i, v_j) \in E \text{ and } f(u_i, v_j) = 1\}$. Como el valor del flujo es kn, cada vértice v_i recibe k unidades de flujo, por la ley de conservación del flujo, tenemos que $|C_i| = k$. Para la segunda restriccion, observemos que $|\{i \mid j \in C_i\}|$ coincide con el flujo de entrada en v_j, de nuevo por la ley de conservación de flujo esta cantidad tiene que coincidir con $f(v_j, t)$. Finalmente al ser un flujo válido tenemos $|\{i \mid j \in C_i\}| = f(v_j, t) \leq c(v_j, t) = b$ y se cumple la segunda restricción.

Por lo tanto tenemos que el problema planteado tiene solución si y solo si el valor del flujo máximo en la red construida es kn.

Por tanto para resolver el problema calcularemos un flujo con valor máximo utilizando un algoritmo que permita obtaner soluciones enteras. Utilizando Ford-Fulkerson el número máximo de augmentations es kn y podemos resolver el problema en $O(kn(|V| + |E|)$ es decir $O(kn^3)$.

Una vez obtenido este flujo f, para $i \in [n]$ obtenemos el conjunto $C_i = \{j \mid (u_i, v_j) \in E \text{ and } f(u_i, v_j) = 1\}$ con un recorrido de los arcos de G en $O(n^2)$ time.

84. Considereu el següent escenari. Ha succeït una catàstrofe a una ciutat gran, el equips de rescat tenen identificats n ferits greus a diferents llocs de la ciutat, que necessiten ser traslladats urgentment a un hospital. Hi han k hospitals disponibles. Degut a la gravetat de les ferides, es important que cada ferit arribe a un hospital abans de 30 minuts. Depenent de a on el ferit esta situat necessita anar-hi a un hospital que estigui com a màxim a 30 minuts de distancia per ambulància. Imagineu que vosaltres sou els responsables de la logística per traslladar els ferits als hospitals. Per a no col·lapsar urgèncias, voleu seleccionar els hospitals de manera que cada hospital rebi com a màxim $\lceil n/k \rceil$ ferits.

    Dissenyeu un algorisme polinòmic per que un cop rebeu la informació sobre el lloc on es cada ferit, pugueu determinar si es possible que tots els ferits siguin transportats a un hospital de manera que arriben abans de 30 minuts i que cap hospital rebi més de $\lceil n/k \rceil$ ferits.

85. Considerem un model molt simplificat d'una xarxa de telefonia mòbil a zones rurals amb baixa densitat de població. Se'ns dona la ubicació de les n estacions base (antenes per a mòbil), especificades com a punts $b_1, \ldots, b_n$ al pla. També se'ns dóna la ubicació dels n telèfons mòbils, especificats com a punts $p_1, \ldots, p_n$ al pla. Finalment, se'ns dóna un paràmetre $\Delta > 0$ de distancia de cobertura dels mòbils Direm que el conjunt dels telèfons mòbils esta *completament connectat* si és possible assignar a cada telèfon a una estació base de manera que:

    - Cada telèfon s'assigna a una estació base diferent,
    - Si el telèfon al punt p_i s'assigna a una estació base b_j, llavors la distància en línia recta entre p_i i b_j és $\leq \Delta$.

    Suposem que el propietari del mòbil p_1 decideix fer un viatge en cotxe cap a l'est sense aturant-se, recorrent un total d'z unitats de distància . Com aquest telèfon mòbil es mou, s'ha d'anar actualitzant l'assignació del mòbil a diferents estacions base per tal de mantenir el mòbil connectat a la xarxa telefònica
    Doneu un algoritme polinòmic per decidir si és possible mantenir la connectivitat entre tot conjunt de mòbils en tot moment totalment connectats, durant el trajecte d'aquest telèfon. Podeu assumir que tots els altres telèfons romanen estacionaris durant aquest viatge. Si és possible mantenir la connectivitat, l'algorisme ha de produir una seqüència de l'assignació dels mòbils a les estacions base, que sigui suficient per a mantenir la connectivitat. Altrament, l'algorisme ha de tornar en quin punt (coordenada) del pla es perd la connectivitat. L'algorisme hauria de tenir una complexitat de $O(n^3)$.
    Exemple: Suposem que tenim 2 mòbils a $p_1 = (0, 0)$ i $p_2 = (2, 1)$; i tenim 2 estacions-base a $b_1 = (1, 1)$ i a $b_2 = (3, 1)$ amb $\Delta = 2$. Suposem que p_1 es desplaça 4 unitats cap l'est fins al punt $(4, 0)$ aleshores podem mantenir la connectivitat entre els mòbils, al començament assignem $p_1 \to b_1$ i $p_2 \to b_2$ i quan p_1 arriba a $(2, 0)$ n'assignem $p_1 \to b_2$ i $p_2 \to b_1$.

86. El *problema de la evacuación* tiene la siguiente definición. Nos dan un grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa una red de carreteras. Una cierta colección de nodos $X \subseteq V$ se designan como *nodos habitados*. Otra colección de nodos S son designados como *nodos seguros*. Suponemos que S y X son disjuntos. En el caso de una emergencia, queremos conocer rutas de evacuación desde los nodos habitados a los seguros. Un conjunto de *rutas de evacuación* se define como un conjunto de caminos en G tales que: (i) cada nodo en X aparece como el inicio de un camino, (ii) el último nodo en un camino aparece en S, (iii) los caminos no comparten aristas.

    Cada ruta de evacuación proporciona una ruta a travéss de la cual los habitantes de un nodo poblado pueden escapar a un nodo seguro sin compartir ninguna parte del camino con habitantes de otros nodos.

    Un conjunto de *rutas de evacuacin mixtas* se define como un conjunto de caminos en el que (i) cada nodo en X aparece como el inicio de un camino, (ii) el último nodo en un camino aparece en S.

    Este tipo de rutas proporciona rutas de escape en las que parte del camino es compartido entre habitantes de distintas ciudades.

    Supongamos que además, debido a las restricciones de tráfico, cada arco $e \in E$ tiene asignada una capacidad de tráfico $c(e)$ que corresponde al número máximo de vehículos que pueden atravesarlo. Una petición de tráfico $r(x)$, para un nodo habitado x, representa el número de vehículos que se quieren evacuar desde x.

    (a) Dados $G = (V, E, c)$ y $S, X \subseteq V$, muestra como decidir en tiempo polinómico si un conjunto de rutas de evacuación existe o no. En caso de que si que existan, el algoritmo debe proporcionar, para cada nodo poblado, la capacidad del arco de capacidad mínima de la ruta que se inicia en él.

    (b) Dados $G = (V, E, c)$, $S, X \subseteq V$, y una petición de tráfico $r(x)$, para cada $x \in X$, muestra como decidir en tiempo polinómico si existe un conjunto de rutas mixtas de evacuación que permitan enviar los vehículos solicitados desde X a nodos seguros y que, además, para cada arco, se cumpla la condición de que el número de vehículos que lo atraviesan no supere la capacidad de tráfico del arco. En caso de que sea posible la evacuación con rutas mixtas, el algoritmo tiene que devolver además, para cada nodo $x \in X$, un plan de evacuación indicando: para cada vehículo saliendo de x, un camino con origen en x y final en un nodo seguro. El total de tráfico asignado entre todos los caminos del plan de escape de todos los nodos $x \in X$ tiene que cubrir la totalidad de las peticiónes de tráfico y cumplir las restricciones de capacidad de los arcos.

87. Una gran part del potencial d'empreses com Yahoo!, Google, Amazon, etc. es basa en el fet que milions de persones visiten cada dia les seves pàgines, (en angles aquest fet s'anomena "eyeballs"). Un cop una persona visita una pagina web d' aquestes companyes, de manera subliminal (o no tant) se intenta convèncer per a que deixen informació personal, la qual cosa permet que en el futur, si la mateixa persona torna a visitar la mateixa pagina web, rebi informació i anuncis extremadament personalitzats i adreçats a l'usuari. Per exemple, si l'usuari ha transmès informació a Yahoo!, que té 20 anys i estudia a la UPC, a Barcelona, rebrà tota mena d'informació sobre lloguers d'habitacions a Barcelona, acadèmies etc. D'altra banda, si l'usuari és un alt executiu rebrà anuncis sobre cotxes de luxe, creuers per illes exòtiques o vacances a la lluna. Una tasca algorismica interessant és personalitzar els anuncis seleccionant els més adients a cada persona.
Suposem que els administradors d'una web popular han identificat k grups de característiques diferents (perfils) $G_1, G_2, \ldots, G_k$, que no són necessàriament disjunts, per exemple G_i pot ser viure a l'Hospitalet, G_j ser dona i G_k que estudia a la UPC. La companyia propietària de la web té contractes amb m empreses anunciadores per mostrar un nombre determinat de còpies dels seus anuncis als usuaris de les seves pagines web. El contracte que la companyia i-èsima fa amb Yahoo! és del tipus:

   - Per a un subconjunt $X_i \subseteq \{G_1, \ldots, G_k\}$ dels grups demogràfics, i vol que els seus anuncis apareguin únicament a grups que són a X_i.
   - Donat un enter r_i l'anunciant vol que els seus anuncis es mostren al menys a r_i usuaris.

   Suposem que en un moment donat, hi ha n usuaris visitant la web. Com que tenim la informació de cadascun d'aquests usuaris, és fàcil conèixer el perfil de l'usuari j (per $j = 1, 2, \ldots, n$), es dir a quin subconjunt $U_j \subseteq \{G_1, \ldots, G_k\}$, pertanyé Voldríem dissenyar un mecanisme tal que cada usuari vegi un únic anunci (d'uns pocs segons) de manera que per se satisfan restriccions imposades per els m anunciants? És dir, per a cada $i = 1, 2, \ldots m$ com a mínim r_i usuaris, on cadascun pertanyé a almenys a un grup a X_i, veu un anunci proporcionat per l'anunciant i. Donar un algoritme eficient (polinòmic) per decidir si això és possible, i si és així, per a triar un anunci que aparegui per a cada usuari.

88. Ara que a Catalunya les eleccions s'apropen, hi ha maneres d'agrupar els districtes electorals en circumscripcions electorals de manera molt acurada per tal d'arribar a resultats que afavoreixin a un partit polític en particular. Aquesta "tècnica"rep el nom de *gerrymandering* als USA i es pot traduïr com *districtació*.

    Gràcies al software disponible, la *districtació* ha canviat de ser una activitat portada a terme per un grup de gent amb mapes, llapis i paper a ser un procés automàtic. Actualment, la districtació no és més que un problema computacional (a més de ser molt susceptible al frau electoral). Es tenen bases de dades molt acurades per al seguiment demogràfic dels possibles votants, que arriben a poder conèixer el perfil de votant fins a nivell de carrer i fins i tot de vivendes. Aquestes dades es poden processar amb ordinadors per agrupar els votants en demarcacions "apropiades"als interessos del partit.

    Suposem que tenim un conjunt de n districtes $D_1, D_2, \ldots, D_n$, cadascun amb m votants. Se suposa que aquests n districtes es reagrupen en dos circumscripcions, i que cadascuna aglutina $n/2$ districtes. Per a cada districte tenim informació sobre quants electors votaran a cada partit (per a simplificar, suposem que només tenim dos partits R i P). Es diu que $D_1, D_2, \ldots, D_n$ és *susceptible de frau electoral* si és possible realitzar la divisió en dos circumscripcions de tal manera que el mateix partit s'assegura la majoria en les dos circumscripcions.
    Doneu un algorisme per determinar si un determinat conjunt de districtes *és susceptible de frau electoral*. Doneu el temps d'execució del vostre algorisme, que ha de ser polinòmic en n i m.
    Exemple: Suposem que tenim $m = 400$ votants, $n = 4$ districtes i la informació següent sobre els votants: sigui P_i (R_i, respectivament) el nombre de votants del partit P (R) al districte i. Si $P_1 = 55$, $R_1 = 45$, $P_2 = 43$, $R_2 = 57$, $P_3 = 60$, $R_3 = 40$, $P_4 = 47$, $R_4 = 53$, és possible repartir els districtes de manera que el partit P tingui la majoria en les dues circumscripcions: simplement agrupem el districtes D_1 i D_4 que formen la circumscripció C_1 , i agrupem els districtes D_2 i D_3 en la circumscripció C_2. Per tant, aquest conjunt de districtes és susceptible de fraud. I malgrat que P té en la població total una escassa majoria de 205 contra 195, acaba guanyant en les dues circumscripcions C_1 i C_2.
    Noteu, que si $P_1 = 90$, $R_1 = 10$, $P_2 = 45$, $R_2 = 55$, $P_3 = 45$, $R_3 = 55$, $P_4 = 45$, $R_4 = 55$, aquest conjunt de districtes no és susceptible de frau electoral.

89. En sociologia, sovint s'estudia un graf $G = (V, E)$ en el qual els nodes representen les persones, i les arestes representen els que són amics entre si. Suposem que l'amistat és simètrica, per la qual cosa podem considerar G com un graf no dirigit.
Volem estudiar aquest graf G, per a trobar grups de persones, molt unides en el sentit de que tots són amics de tots. Una manera de formalitzar aquesta idea seria la següent. Per a un subconjunt $S \subseteq V$ sigui $e(S)$ el nombre d'arestes dintre d'S, és a dir, el nombre d'arestes que tenen tots dos extrems en S. Definim la *cohesió* d'S com $e(S)/|S|$. en aquest tipus de grafs, un paràmetre natural podia ser el conjunt $S \subseteq V$ amb cohesió màxima.

(a) Doneu un algorisme polinòmic que pren com a entrada G i un nombre α racional, i determina si hi ha un conjunt S amb cohesió $> \alpha$.

(b) Doneu un algoritme polinòmic per trobar un conjunt $S \subseteq V$ amb la màxima cohesió.

Una solución

Antes de definir el algoritmo vamos a asociar el problema con un parámetro de una red de flujo. Construimos la siguiente red:

- Por cada $\{u, v\} \in E$ añadimos dos arcos (u, v) y (v, u) con capacidad 1.
- Añadimos vertice s y para cada $u \in V$ un arco (s, u) con capacidad $d(u)$.
- Añadimos vertice t y para cada $u \in V$ un arco (u, t) con capacidad 2α.

Analizemos la capacidad de los $s - t$ cortes (S, T). Supongamos que $S = \{s\} \cup A$ and $T = \{t\} \cup B$.

Notemos que $c(\{s\}, V \cup \{t\}) = 2m$ y $c(V \cup \{s\}, \{t\}) = 2\alpha n$.

Si $\alpha < m/n$, V tiene la cohesión requerida

En caso contrario $2m < 2\alpha n$ y mincut $\leq 2m$.

Para un corte genérico la capacidad del corte es:

$$\begin{aligned} c(S,T) &= \sum_{u \in B} d(u) + \sum_{v \in A} 2\alpha + c(A,B) \\ &= 2\alpha|A| + 2e(B) + 2c(A,B) \\ &= 2\alpha|A| + 2m - 2e(A) \\ &= 2(m + \alpha|A| - e(A)) \end{aligned}$$

$c(S, T) > 2m$ iff $\alpha|A| - e(A) < 0$ iff $\alpha|A| < e(A)$ iff $e(A)/|A| > \alpha$.

Hay un conjunto con cohesion $> \alpha$ iff min-cut $< 2m$

(a) La red se puede construir en tiempo polinómico. Luego calculamos el valor de MaxFlow usando Edmonds Karp en tiempo $O(nm^2)$. Y hacemos la comparación final. Obteniendo un algoritmo con coste polinómico.

(b) Primero calcularemos el valor mas grande de α ($\alpha_{\max}$) para el que existe un conjunto ocn cohesión α. Para ello combinaremos búsqueda binaria con el algoritmo del apartado anterior. Una vez obtenido el valor $\alpha_{\max}$, obtenemos un flujo f con valor máximo usando Edmonds Karp en tiempo $O(nm^2)$ para $\alpha_{\max}$. A partir de f obtenemos el grafo residual y tomamo como A los vertices accesibles desde s en este grafo. De acuerdo con el teorema maxflow-mincut $s \cup A$ define un corte con capacidad máxima y de acuerdo con el resultado anterior A tiene cohesión máxima. Como en el paso anterior el tiempo total es polinómico ya que la cohesión de un conjunto es un valor entre 0 y n.

90. Tenim un digraf $G = (V, E)$ on cada $e \in E$ té capacitat $c(e) = 1$, i amb una font $s \in V$ i un sumider $t \in V$. També en donen un paràmetre $k \in \mathbb{N}$. Doneu un algorisme amb temps polinòmic per a resoldre el següent problema: Volem eliminar k arestes de G de manera que reduïm al màxim que puguem el flux $s \to t$. En altres paraules, volem trobar un $F \subseteq E$ tal que $|F| = k$ i el flux màxim $s \to t$ en $G' = (V, E - F)$ sigui el més petit possible.

91. Sigui $G = (V, E)$ un digraf, i suposem que cada $v \in V$ té el mateix nombre d'arestes que entren que d'arestes que surten, o sigui $|\{(u, v) : (u, v) \in E\}| = |\{(v, u) : (v, u) \in E\}|$. Donat un enter $k \geq 1$, siguin $x, y \in V$ tal que existeixen k camins disjunts (sense repetir arestes) $x \to y$. Es cert que també existeixen k camins disjunts $y \to x$? Si la resposta és afirmativa, doneu una demostració, altrament doneu un contraexemple.

92. Suposeu que hi han n països que comercien entre ells. Per a cada país i, coneixem el valor del seu superàvit pressupostari s_i, (aquest nombre pot ser positiu o negatiu, un nombre negatiu indica un dèficit). Per a cada parell de països i, j coneixem $e_{i,j} \geq 0$, el valor total de totes les exportacions d'i cap a j, aquest nombre és sempre no negatiu. Diem que un subconjunt S dels països és *autosuficient* si la suma dels superàvits pressupostaris dels països a S, menys el valor total de tots els exportacions dels països a S cap a els països que no són a S, és més gran que zero.
Doneu un algorisme polinòmic, que a partir d'aquestes dades per n països, decideix si existeix un subconjunt **no buit**, que és autosuficient.

93. Un grup d'amics lloguen entre tots una embarcació d'esbarjo per sortir junts a navegar. Cada vegada que es fa un viatge cal que un dels usuaris (el mateix durant tot el viatge) s'encarregui de preparar el vaixell, n'assumeixi la conducció i l'atracada. També haurà de fer-se responsable de la neteja i reparació de desperfectes apareguts durant el viatge. A aquesta persona l'anomenem *responsable* del viatge. A ningú li ve de gust ser responsable i la nostra tasca és fer una assignació *justa* respecte de l'ús que fa cadascuna de les persones del grup.

    Hi han dos elements que semblen raonables a l'hora de definir una assignació justa. Si una persona fa servir el vaixell moltes vegades, també hauria de ser responsable moltes vegades. D'altra banda, si una persona fa servir el vaixell en dies en què poques persones volen usar-lo, això també hauria d'incrementar el nombre de vegades que és responsable. Si no veus clar aquest segon criteri, pensa en el cas que 2 persones viatgen 20 vegades juntes i amb ningú més. És lògic que en siguin responsables 10 vegades cadascuna. Si per altra banda hi ha 20 persones que viatgen 20 vegades juntes, i amb ningú més, és natural que els toqui ser responsable un cop a cadascuna d'elles.

    Suposem que una persona viatja r vegades. En el seu primer viatge hi ha k_1 passatgers, en el segon k_2, i així fins k_r. Sembla just que a aquesta persona sigui responsable $S = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{k_j}$ vegades. Com que aquest número pot no ser sencer, ens conformarem amb que sigui responsable com a molt $\lceil S \rceil$ vegades. Si això passa per a tothom, direm que la assignació és justa.

    Assumim que el grup està format per un conjunt A de m amics, $A = \{1, \dots m\}$. L'entrada del problema correspon a la informació de n viatges. Per a cada viatge i, s'ens dona el conjunt $V_i \subseteq A$ de viatgers.

    (a) Demostreu que per a qualsevol entrada $V_1, \dots, V_n$, hi ha una assignació justa.

    (b) Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic en n i m que proporcioni una assignació de responsable per a cadascun dels n viatges que sigui justa.

94. El servicio de control alimentario de la Generalitat está intentando acreditar un procedimiento de medida de la calidad alimentaria de productos complejos. En el laboratorio disponen m cromatógrafos y tienen técnicas de análisis de n componentes. Para cada cromatógrafo j se conoce conjunto S_i de componentes que puede analizar.

Para acreditar el procedimiento necesitan garantizar que se han realizado como mínimo k análisis en cromatógrafos diferentes de cada una de las componentes. Dependiendo del nivel de independencia se requieren condiciones adicionales.

- Nivel A: Un cromatógrafo solo puede utilizarse para analizar un máximo de dos componentes.
- Nivel B: Los cromatógrafos del laboratorio son de tres marcas diferentes. En este nivel se requiere además que los cromatógrafos que analicen una componente no sean todos de la misma marca.

Diseñad algoritmos para resolver los siguientes problemas:

- Dados n, m, k y para cada cromatógrafo j, $1 \leq j \leq m$, los conjuntos $S_j \subseteq \{1, \ldots n\}$, determinar si es posible realizar análisis de las n componentes con el nivel de acreditación A.
- Dados n, m, k y para cada cromatógrafo j, $1 \leq j \leq m$, los conjuntos $S_j \subseteq \{1, \ldots n\}$ y la marca $m_j \in \{1, 2, 3\}$, determinar si es posible realizar análisis de las componentes con el nivel de acreditación B.

Los dos algoritmos, siempre que sea posible, deben obtener además una asignación de cromatógrafos a componentes verificando las condiciones requeridas por el nivel de acreditación.

95. **SafeTrans** es dedica al transport de mercaderies perilloses o de gran volum i/o pes per carretera. La companyia està analitzant la possibilitat d'acceptar un encarreg per traslladar els residus emmagatzemats a un dipòsit cap a un altre més segur. Per fer l'anàlisi de viabilitat el seu equip logístic ha definit un graf dirigit $G = (V, E)$ que representa la xarxa de carreteres que permetria connectar els dos dipòsits $s, t \in E$ dintre d'uns límits de quilometratge raonables.

Degut a la natura dels materials a transportar el trasllat s'ha de fer al llarg de com a màxim 5 dies durant la nit i a més s'ha de tenir en compte, en la mesura del possible, el nivell de seguretat que es pot assolir. Per això volen que l'equip informàtic els doni informació sobre la possibilitat de fer el trasllat tenint en compte diferents restriccions. En tots els escenaris, per raons de seguretat un tram de carretera només es pot fer servir com a molt una de les 5 nits.

Escenari 1: Si un tram de carretera es fa servir una nit, aquesta nit només hi pot circular per ell un camió carregat.

Escenari 2: Les condicions de l'escenari 1 es poden relaxar, per un subconjunt de trams de carretera suficientment aïllats. Suposant que $S \subset E$ son els trams suficientment aïllats. En aquest escenari s'ha de garantir: Si un tram de carretera a S es fa servir una nit, aquesta nit poden circular un o dos camions carregats. Si un tram de carretera no és a S i es fa servir una nit, aquesta nit només hi pot circular un camió carregat.

Escenari 2: Una anàlisi alternativa de la densitat dels nuclis de població ha determinat que en la majoria dels casos la població està suficientment aïllada, però que hi han un cert subconjunt de nuclis urbans densament poblats. Suposant que $D \subset V$ és el conjunt de nuclis urbans amb alta densitat de població. En aquest escenari s'ha de garantir que com a molt un camió carregat circuli una nit per $d \in D$. En contrapartida, si un tram de carretera es fa servir una nit, aquesta nit poden circular per ell fins a tres camions carregats.

Proporcioneu algorismes, per a cada escenari, què:

(a) Donats, G, S i D juntament amb s i t, determini un conjunt tan gran com sigui possible de rutes potencials per fer el transport en una nit.

(b) Donats, G, S, D, c, $1 \leq c \leq 5$, i k juntament amb s i t determini si es possible seleccionar rutes per k camions i c dies, i en cas de que sigui possible proporcioni aquestes rutes, assegurant què: cada camió carregat fa com a molt un trajecte per nit; globalment es compleixen les restriccions imposades per l'escenari; i a més el nombre total de trasllats es més gran que $\frac{2}{3}ck$.

Solució:

(a) Resolveremos el problema como un problema de flujo máximo. Para cada escenario tendremos una red de flujo que modela el problema. Sobre esta red calcularemos el flujo máximo usando Ford Fulkerson. Una vez calculado un flujo con valor máximo consideraremos el grafo G' en el que solo aparecen las aristas con flujo positivo. En G' repetiremos el siguiente proceso: obtener un camino de s a t, este camino será una ruta; reducir el valor del flujo en una unidad en todas las aristas del camino; eliminar aquellas en las que el flujo sea 0.

En el escenario 1, tenemos que calcular caminos que no comparten aristas, tal y como hemos visto en clase basta con asignar capacidad 1 a todos los arcos en E y tomat s como fuente y t como sumidero.

En el escenario 2, los arcos en S pueden soportar dos caminos, les asignaremos capacidad 2 y a los que no están en S capaciadad 1. Cualquier conjunto de rutas que cumpla las condiciones se puede convertir en un flujo en el que el valor del flujo en arcos de S es menor o igual que 2 y al revés siempre que el flujo tenga valores enteros. Por lo tanto un flujo entero con valor máximo nos proporciona una solución al problema en este escenario.

En el escenario 3, asignaremos a los arcos capaciadad 3 y tal como hemos visto en clase para conseguir que los caminos no pasen dos veces por el mismo node en D, convertiremos el grafo en un grafo G' donde cada nodo $d \in D$ se remplaza por dos nodos d' y d'', los arcos que entran en d entraran en d', los que salen lo harán de d'' y añadimos un arco (d', d'') con capacidad 1.

En cualquiera de los tres casos el coste de calcular maxflow es $O((n+m)m)$ ya que el valor del flujo máximo es como mucho $3m$. Con el mismo coste se pueden obtener la lista de rutas, realizando un BFS por cada unidad de flujo.

(b) Notemos que los tramos de carretera solo se pueden utilizar en uno de los c días, por ello es necesario que el número total de rutas, calculado en el apartado a) sea $\geq \frac{2}{3}ck$.

Además necesitamos encontrar una partición de E en c conjuntos $E_1, \dots, E_c$ que nos permita asignar $\leq k$ rutas por día y suficientes rutas a lo largo de los c días. Para una partición $E_1, \dots, E_c$, resolveremos el problema de flujo máximo como en el apartado a) obteniendo c valores de flujo $f_1, \dots, f_c$, dónde $f_i = maxflow(V, E_i, s, t, c)$. La partición nos proporciona una solución sí $\sum_{i=1}^{c} \min k, f_i \geq \frac{2}{3}ck$.

En el escenario 1 las rutas son totalmente independientes, ya que no comparten aristas y por lo tanto se pueden asignar a cualquiera de los dias. Una vez resuelto a) asignamos las primeras k rutas al día 1, las siiguientes k al día 2, hasta que acabemos con todas las rutas disponibles o llenemos los c días.

En los escenarios 2 y 3, recorreriamos todas las particiones posibles hasta encontrar una en la que las condiciones se cumplan o concluir que no hay tal solución.

En el escenario 1 el coste es como en el caso a) $O((n+m)m)$, pero podríamos reducirlo a $O((n+m)ck)$ finalizando el algoritmo cuando el valor del flujo llegue al mínimo requerido. En los escenarios 2 y 3 tenemos que recorrer todas las particiones, este número es exponencial si $c > 1$, el algoritmo tiene coste exponencial, aún cuando el coste por partición es polinómico.